Занятие 1
Последовательности

Определение. Говорят, что задана *последовательность* $a_1, a_2, \ldots, a_n$, если для любого натурального k от 1 до n определено число a_k. Последовательность может быть и бесконечной: $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ — если a_k задано для всех натуральных k. Числа $a_1, a_2, \ldots$, называются *элементами* последовательности.

Существуют несколько способов задания последовательностей:

- Формула общего элемента: позволяет найти элемент последовательности по формуле, зная его номер.
- Рекуррентный: каждый следующий элемент выражается через один или несколько предыдущих.
- Конструктивно-алгоритмический: указан алгоритм, позволяющий за конечное число действий найти любой элемент последовательности. (На самом деле, к этому способу относятся и первый, и второй способы, но их принято выделять отдельно.)
- Неконструктивно-описательный.

1. Напишите первые шесть членов последовательности $\{a_n\}$, заданной формулой n-ного члена:

а) $a_n = n$; г) $a_n = n^2 - 5n$;

б) $a_n = 5$; д) $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$;

в) $a_n = \dfrac{1}{n+1}$; е) $a_n = (-1)^n + (-1)^{n+1}$.

2. Напишите первые шесть членов последовательности $\{b_n\}$, заданной рекуррентно:

а) $b_1 = 9,\ b_{n+1} = 0,1b_n + 9$;
б) $b_1 = 5,\ b_{n+1} = (-1)^n b_n - 8$;
в) $b_1 = b_2 = 1,\ b_{n+2} = b_{n+1} + b_n$(последовательность Фибоначчи);
г) $b_1 = -10,\ b_2 = 2,\ b_{n+2} = |b_n| - 6b_{n+1}$.

3. Напишите первые шесть элементов и в пунктах а-в составьте формулу n-ного элемента последовательности
а) четных натуральных чисел, не делящихся на четыре;
б) нечетных натуральных чисел, делящихся на три;
в) натуральных чисел, которые при делении на 10 дают остаток 9;
д) $\{\varphi(n)\}$, где $\varphi(n)$ — количество чисел от 1 до n, взаимно простых с n;
е) $\{q_n\}$, где q_n — наибольшее число частей, на которую могут разбить плоскость n прямых.

4. Может ли какой-нибудь элемент последовательности $\{a_n\}$, где $a_n = 6n + 5$, при делении на 18 дать в остатке 10?

5. Может ли какой-нибудь элемент последовательности $\{b_n\}$, где $b_n = n^3 - n + 2$, при делении на 6 дать в остатке 4?

6. Задайте последовательность $\{s_n\}$, где $s_n = 1 + 2 + \ldots + n$
а) рекуррентно; б) с помощью формулы (без многоточия). *Указание:* рассмотрите отдельно случаи чётного и нечётного n.

7. Сумма номеров домов на одной стороне квартала 247. Найдите номер дома, седьмого от угла.

8. Все элементы последовательности — натуральные числа, причём каждый следующий больше предыдущего на одно и то же число. Докажите, что среди элементов последовательности найдется такое число, в записи которого имеется хотя бы один нуль.

9. Последовательность $\{a_n\}$ задана соотношением $a_{n+2} = \frac{a_{n+1}}{a_n}$ и двумя первыми элементами $a_1 = 2$, $a_2 = 3$. Найдите a_{500}.

10. Найдите 2007-ю цифру после запятой в десятичной записи числа $\frac{1}{7}$.

11. Пусть $x = 3,222222\ldots$. Найдите а) $10x$; б) $9x$.

12. Пусть $y = 3,424242\ldots$. Найдите $99y$.

13. Пусть $z = 3,422222\ldots$. На какое наименьшее число нужно умножить z, чтобы произведение получилось натуральным?

14. Переведите в обыкновенную дробь: а) $0,(3)$; б) $0,(1)$; в) $2,(57)$; г) $1,3(14)$.

15. Докажите, что в любой бесконечной последовательности натуральных чисел найдутся два элемента, разность которых делится на 2007.

16. Докажите, что $0,(9) = 1$.

17. Является ли дробь $0,1234\dots20072008\dots$ периодической?

18. Докажите, что в последовательности Фибоначчи найдётся число, которое делится на 2007.