

#### 44. Степень точки относительно окружности (21.04.2008)

1. Дана точка  $E$  и окружность  $s$ . Прямая, содержащая точку  $E$ , пересекает окружность в точках  $A$  и  $B$ ,  $E \in AB$ . Докажите, что величина  $EA \cdot EB$  не зависит от выбора прямой, если а)  $E$  лежит внутри окружности; б)  $E$  лежит вне окружности.

Величина  $EA \cdot EB$ , взятая в пункте со знаком «+», если  $E$  лежит внутри  $s$ , и со знаком «-», если  $E$  — вне  $s$ , называется *степенью точки  $E$  относительно окружности  $s$* .

2. (Продолжение пункта б) ) Докажите, что  $EA \cdot EB = EC^2$ , если  $EC$  — касательная.

3. а) Окружности  $s_1$  и  $s_2$  пересекаются в точках  $A$  и  $B$ . Через точку  $E$  проведены секущие  $C_1D_1$  и  $C_2D_2$  к окружностям,  $E \in AB$ . Докажите, что  $EC_1 \cdot ED_1 = EC_2 \cdot ED_2$ .

б) Докажите, что если точка  $E$  находится вне этих окружностей и из неё проведены не секущие, а касательные, то длины отрезков, соединяющих точку  $E$  с точками касания, равны.

4. В прямоугольном треугольнике  $ABC$  с прямым углом  $C$  катет  $BC$  равен  $a$ , радиус вписанной окружности равен  $r$ . Вписанная окружность касается катета  $AC$  в точке  $D$ . Найдите хорду, которую высекает на окружности прямая  $BD$ .

5. Докажите, что для всех хорд  $AB$  данной окружности  $s$  величина  $\frac{AB^2}{AD}$ , где  $AD$  — расстояние от точки  $A$  до касательной, проведённой в точке  $B$ , зависит только от окружности и не зависит от выбора хорды  $AB$ .

6. Из точки  $M$ , расположенной вне окружности на расстоянии  $\sqrt{7}$  от центра, проведена касательная  $MA$  и секущая, внутренняя часть которой вдвое меньше внешней и равна радиусу окружности. Найдите радиус окружности.

7. В угол вписаны окружности  $s_1$  и  $s_2$ .  $s_1$  касается сторон угла в точках  $K_1$  и  $K_2$ , а  $s_2$  — в точках  $L_1$  и  $L_2$ . Докажите, что прямая  $K_1L_2$  высекает на  $s_1$  и  $s_2$  равные хорды.

8.  $BD$  — биссектриса треугольника  $ABC$ . Докажите, что  $BD^2 = AB \cdot BC - AD \cdot DC$ .