

1. Окружности с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках A и B . Прямая O_1A пересекает вторую окружность в точке N . Докажите: точки O_1 , O_2 , B и N лежат на 1 окружности.
2. AA_1 , BB_1 и CC_1 — высоты остроугольного треугольника ABC . Точка D — проекция точки C_1 на высоту BB_1 . Оказалось, что точки A_1 , B_1 , C_1 , D лежат на одной окружности. Какие значения может принимать величина угла BAC ?
3. В остроугольном $\triangle ABC$ прямая, проходящая через вершину B параллельно AC , пересекает серединный перпендикуляр к AC в точке D . Докажите, что точки M , D , B , N лежат на одной окружности, где M и N — середины сторон AB и BC соответственно.
4. В выпуклом шестиугольнике малые диагонали равны между собой, а также главные диагонали равны между собой. Докажите, что шестиугольник — вписанный.

42. Описанные четырёхугольники (14.04.2008)

5. а) Докажите, что если четырёхугольник $ABCD$ описанный, то $AB + CD = BC + DA$.
 б) Докажите, что если в *выпуклом* четырёхугольнике $ABCD$ $AB + CD = BC + DA$, то он описанный. в) Существенно ли в пункте б) условие выпуклости?
6. а) Докажите, что в любой ромб можно вписать окружность.
 б) Докажите, что если в параллелограмм можно вписать окружность, то он — ромб.
7. В четырёхугольник $ABCD$ вписана окружность с центром O . Докажите, что $\angle AOB + \angle COD = 180^\circ$.
8. Найдите радиус окружности, вписанной в прямоугольную трапецию с основаниями a и b .
9. Четырёхугольник $ABCD$ невыпуклый, причём диагональ BD лежит вне его. Прямые AB и CD пересекаются в точке B_1 , а прямые BC и AD — в точке D_1 .
 а) Докажите: если четырёхугольник AB_1CD_1 описанный, то $BB_1 + DB_1 = DD_1 + BD_1$.
 б) Верно ли обратное утверждение?