

# Математика как наука и как школьный предмет

Станислав Смирнов

27 ноября 2014 года



**Санкт-Петербургский  
государственный  
университет**

- 1) **Часть человеческой культуры**, как и искусство – красивые и интересные объекты и теоремы
- 2) **Применения в естественных и гуманитарных науках** (физика, экономика, лингвистика, биология, ... ) – как язык и для понимания природы явлений
- 3) **Практические применения**  
(от мобильной телефонии до добычи нефти)

Иногда от школьной (да и университетской) программы создается впечатление, что Пифагор и Эйлер уже все доказали.

Это не так! **Математика развивается!**

## Что такое случайный полимер?

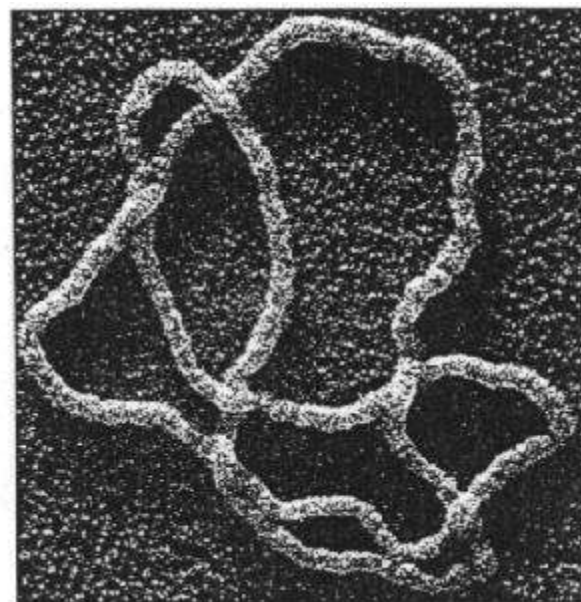
Для макромолекулы важен не только состав, но и расположение в пространстве

Рассмотрим длинную молекулу

(ДНК, полимерную цепь)

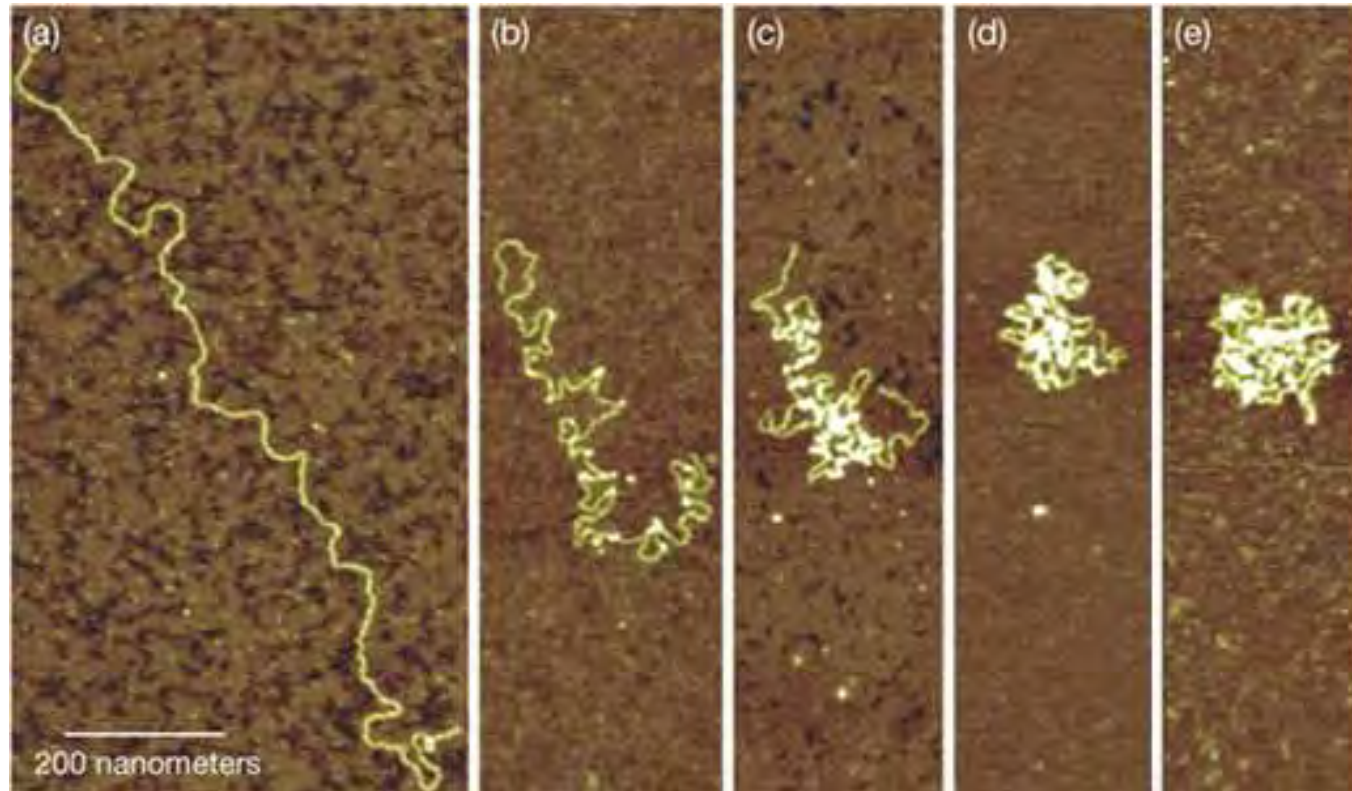
Как она расположена?

Встречаются даже узлы!



## Геометрическая структура меняется:

Картинки компактификации **ДНК** в дрожжах, вызванной протеином AbF2. Как описать?

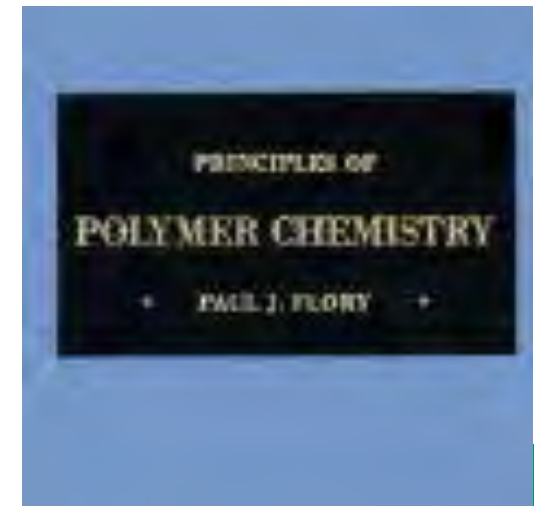
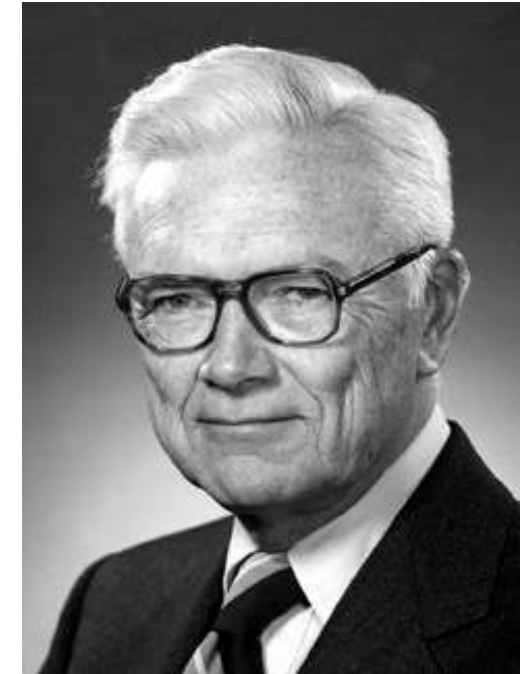


атомно-силовая микроскопия

## Paul Flory (1910-1985)

1974 Нобелевская премия по химии. Предложил моделировать положение линейной молекулы **само-избегающим блужданием**

(Случайное Блуждание без самопересечений)



## Несколько вопросов:

- Сколько таких блужданий длины  $n$ ?
- Как выглядит типичное блуждание?
- Как далеко оно уходит за  $n$  шагов?
- Какова фрактальная размерность?

**Flory (1948): размерность =  $4/3$**

- Ответ правильный! (теория **Ландау**)
- Идея неправильная... (**de Gennes**)

Неполные объяснения: **Nienhuis**,  
затем **Lawler, Schramm, Werner**.





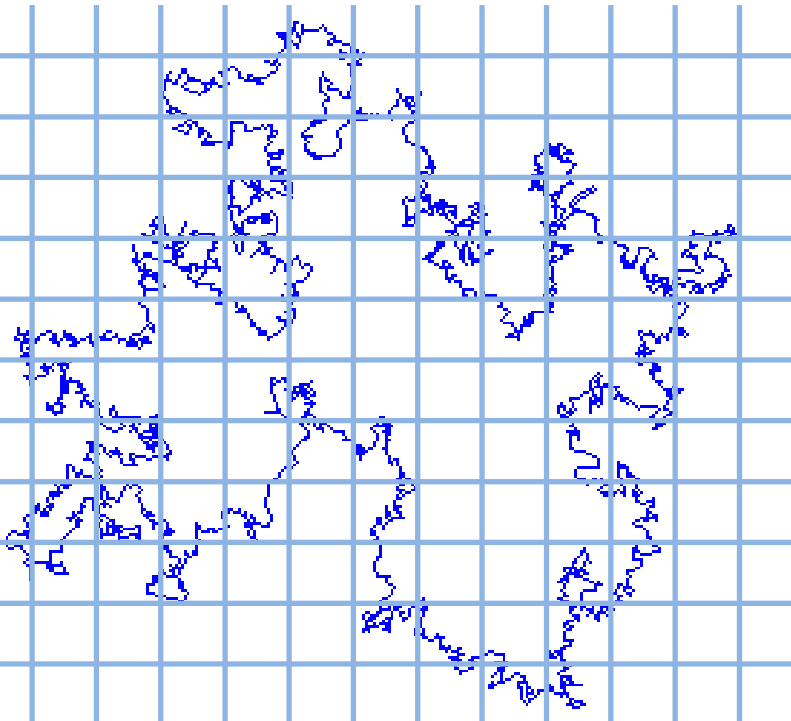
### Бенуа Мандельброт (1924-2010)

французский и американский математик, известный как отец теории фракталов.

### Фрактал размерности $4/3$ :

При покрытии сеткой  $L \cdot L$  пересекает  $\approx L^{4/3}$  квадратиков.

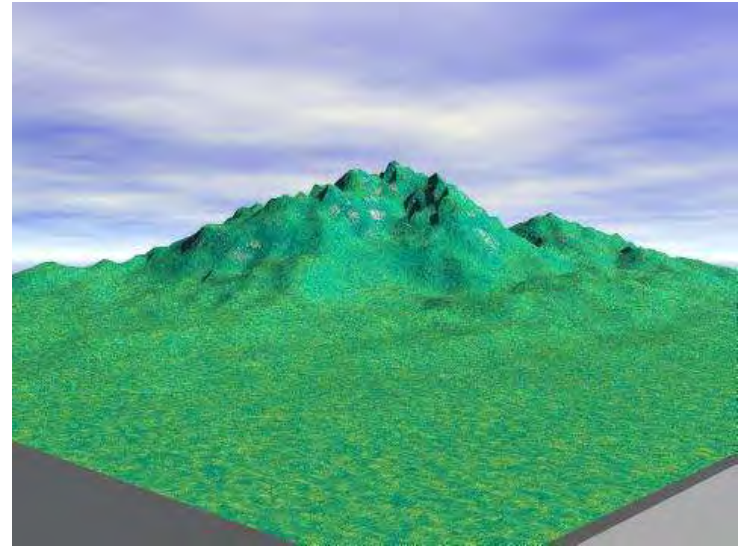
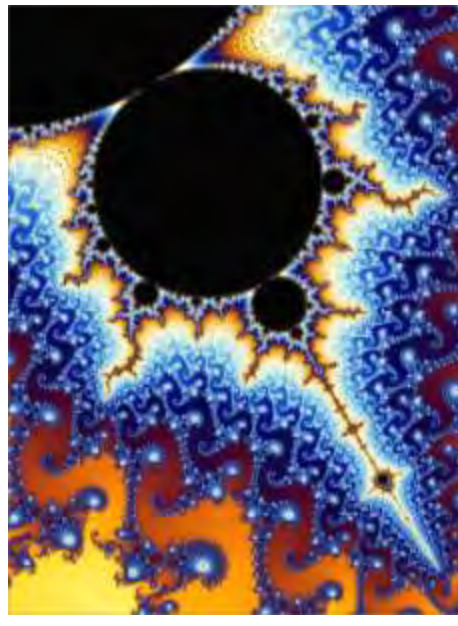
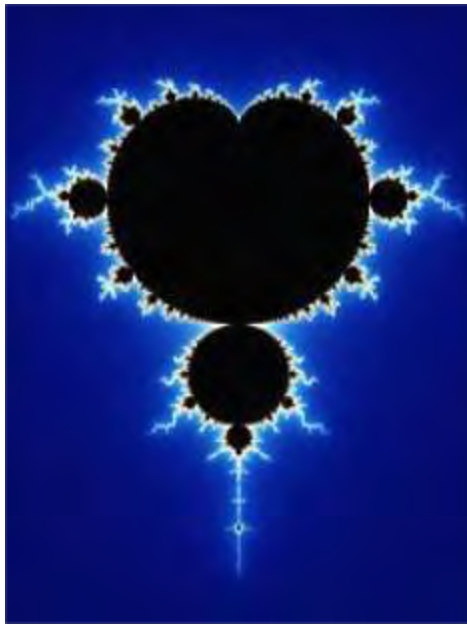
Для покрытия гладкой поверхности надо  $\approx L^2$ , кривой  $\approx L$



## Связь с фракталами

**Benoit Mandelbrot:**

**« Облака не шары,  
горы не конусы,  
берега не окружности,  
лай не мелодичен, и молния  
путешествует не по прямой »**





## Несколько вопросов:

- Сколько таких блужданий длины  $n$ ?
- Как выглядит типичное блуждание?
- Как далеко оно уходит за  $n$  шагов?
- Какова фрактальная размерность?

**Flory (1948): размерность =  $4/3$**

- Ответ правильный! (теория **Ландау**)
- Идея неправильная... (**de Gennes**)

Неполные объяснения: **Nienhuis**,  
затем **Lawler, Schramm, Werner**.

Сколько таких блужданий длины  $n$ ?

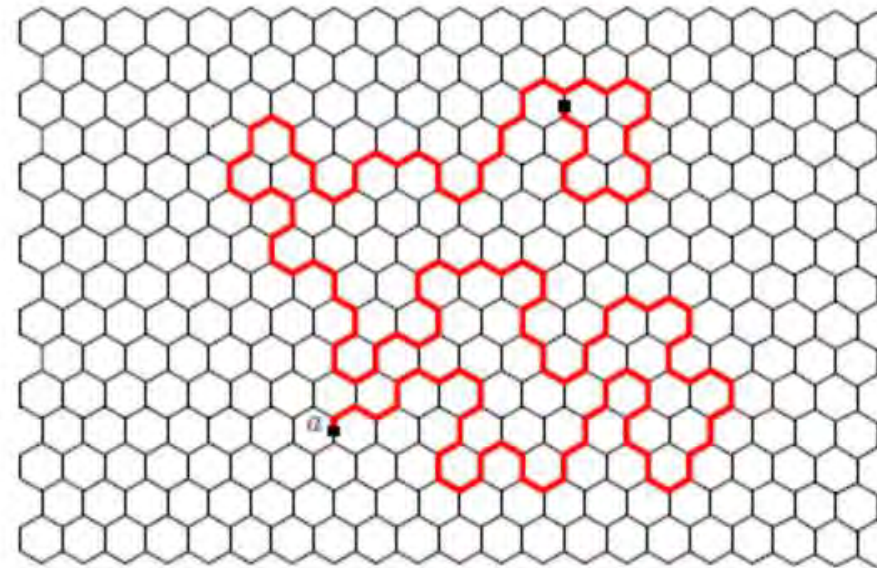
Обозначим через  $C(n)$  их число.

- **Наблюдение:**  $C(n+m) \leq C(n) \cdot C(m)$
- Вывод:  $C(n) \approx \mu^n$
- **Наблюдение:**  $\mu$  зависит от решетки

**Гипотезы Nienhuis'a**

- $C(n) \approx \mu^n \cdot n^{11/32}$
- $11/32$  универсально
- На шестиугольной

решетке  $\mu = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$



## Смирнов и Dumitriu-Corin (2010)

На шестиугольной решетке  $\mu = x_c = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$

**Док-во:** ряд

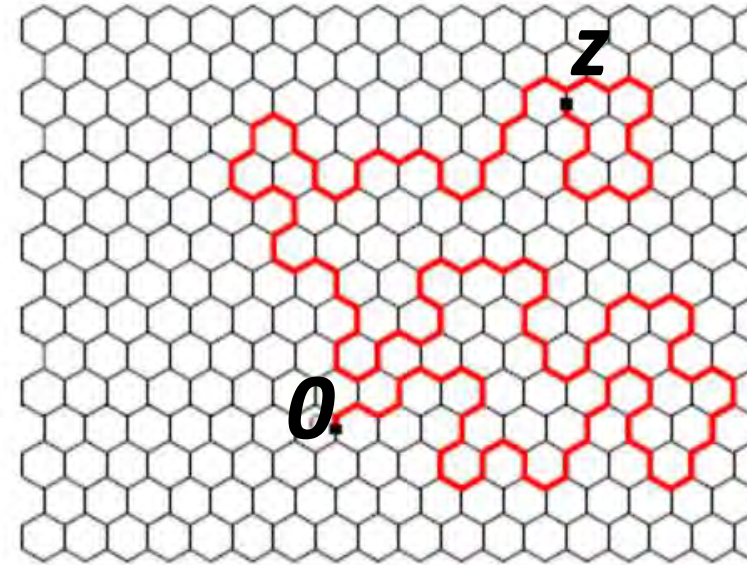
$\sum$  Само-Изб.Блуждания из 0  $x$ -длина  
сходится для  $x > x_c$ ,  
расходится для  $x < x_c$ .

**Идея:** модифицируем ряд

$$F(z) = \sum_{\text{СИБ } 0 \rightarrow z} \cos(\lambda \cdot \# \text{поворотов}) x\text{-длина}$$

**Наблюдение:**  $F(z)$  гармонична, если

$$\lambda = \pi/8 \quad x = 2 \cos(\pi/8) = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$$



**Jean Baptiste Joseph Fourier**  
**(1768-1830)**, французский  
физик и математик,  
губернатор нижнего Египта.



**«Аналитическая теория теплоты»**

1822 г. Одна из целей – определить  
оптимальную глубину винного погреба.

**Стационарная температура** даётся

**гармонической** функцией  $F_{xx}(z)+F_{yy}(z)=0$ ,

на решетке  $F(z) = (F(z_1)+F(z_2)+F(z_3))/3$

**Gustav Robert Kirchhoff**

**(1824-1887)** немецкий физик, занимался многими Предметами, в том числе электрическими цепями.



Если  $F(z)$  – потенциал, то

$F(z_1)-F(z)$  – ток из  $z_1$  в  $z$ . Запишем

$$F(z) = (F(z_1)+F(z_2)+F(z_3)) / 3$$

как **первый закон Кирхгофа**:

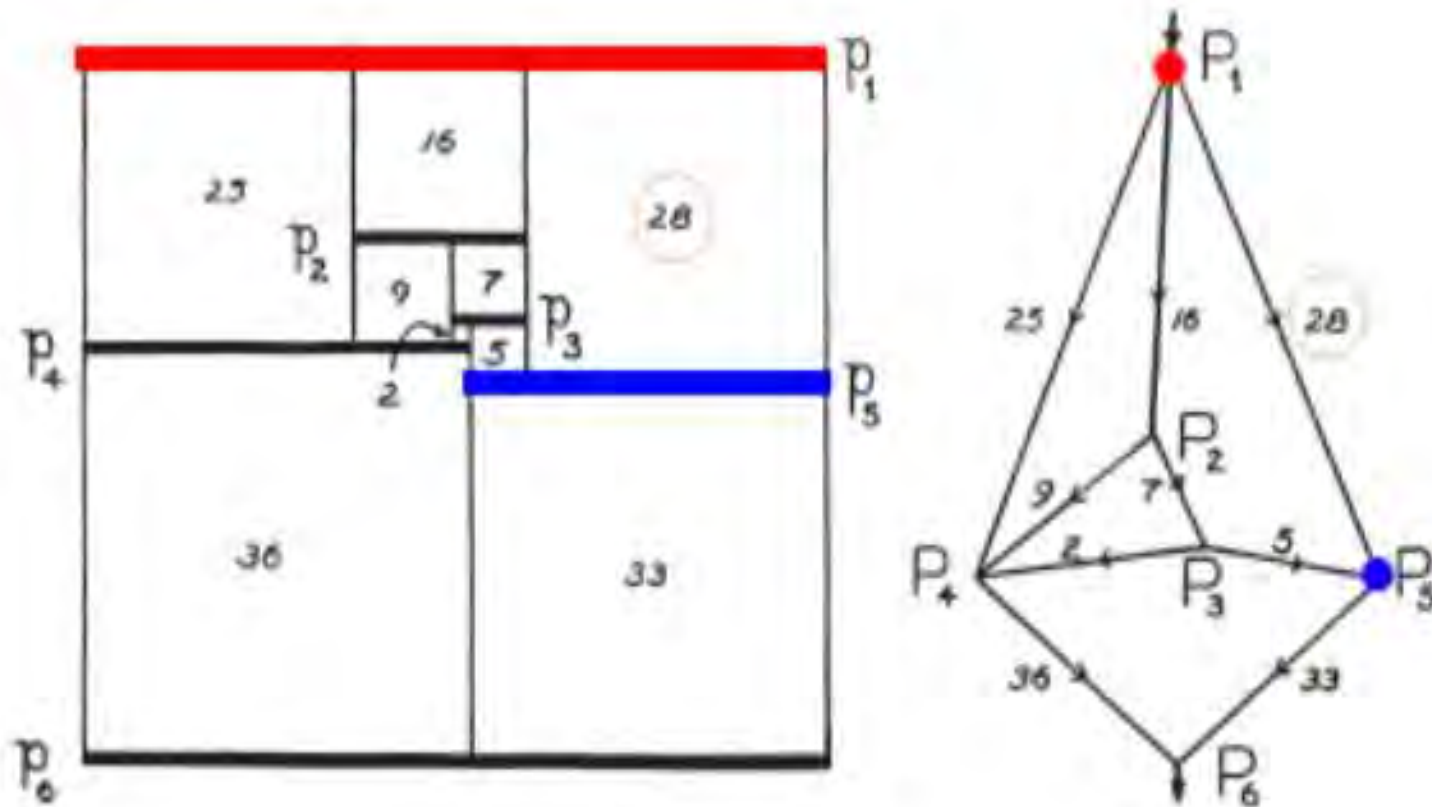
$$(F(z_1)-F(z))+(F(z_2)-F(z))+(F(z_3)-F(z)) = 0 \quad !!!$$

*Предполагаем единичные сопротивления*



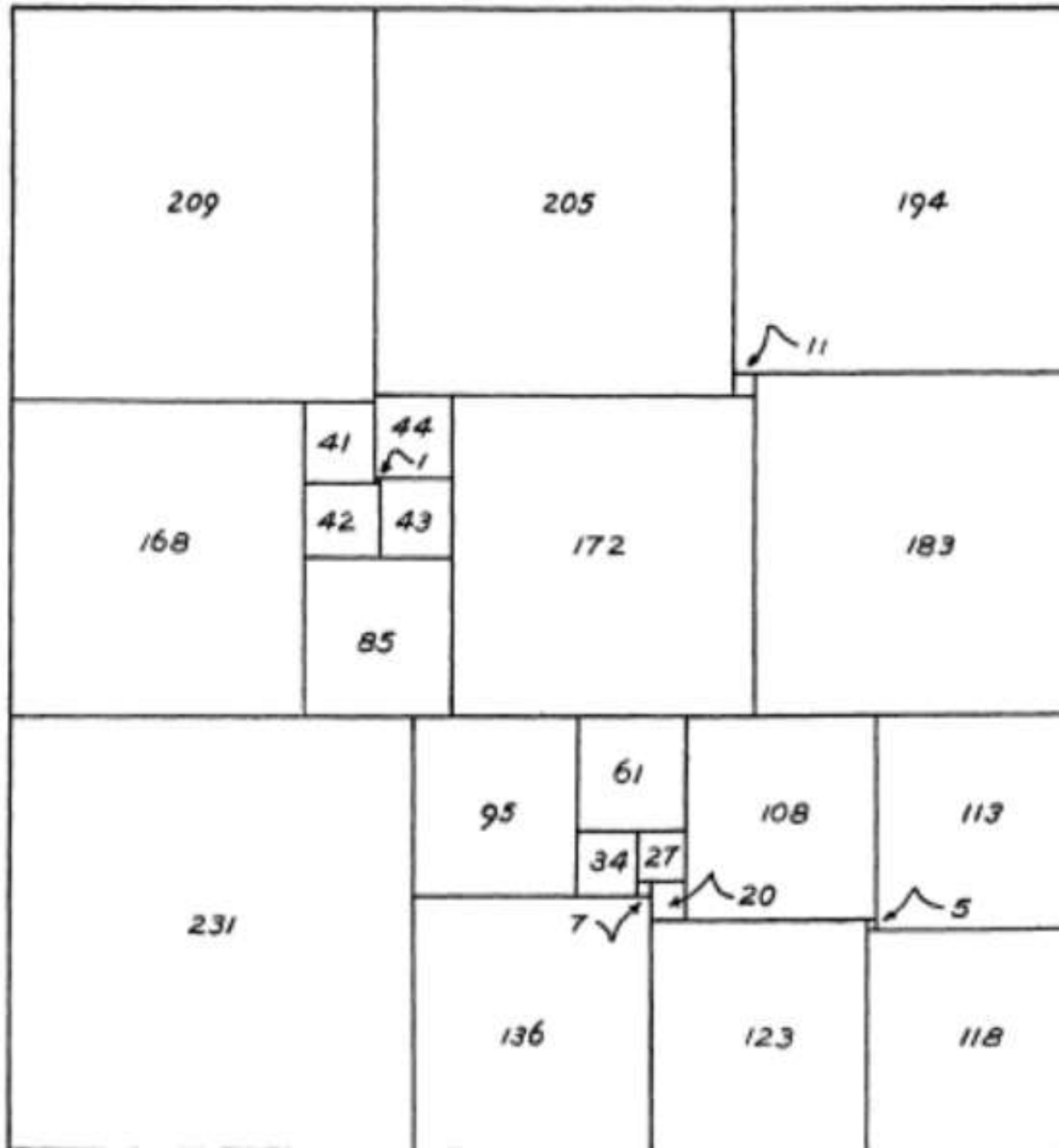
# Связь с «простой» геометрией

[Brooks-Smith-Stone-Tutte, 1940 – студенты Кэмбриджа]  
«Разбиение прямоугольников на квадраты»



-порождают течения тока с гармоническим потенциалом

# Задача Н.Н.Лузина

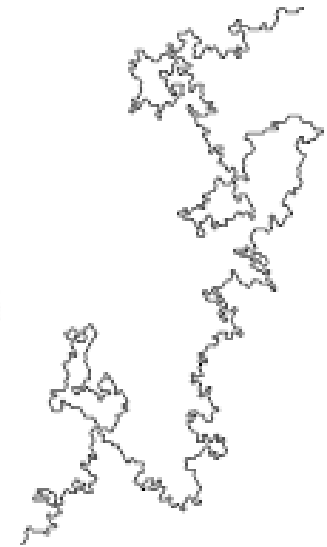
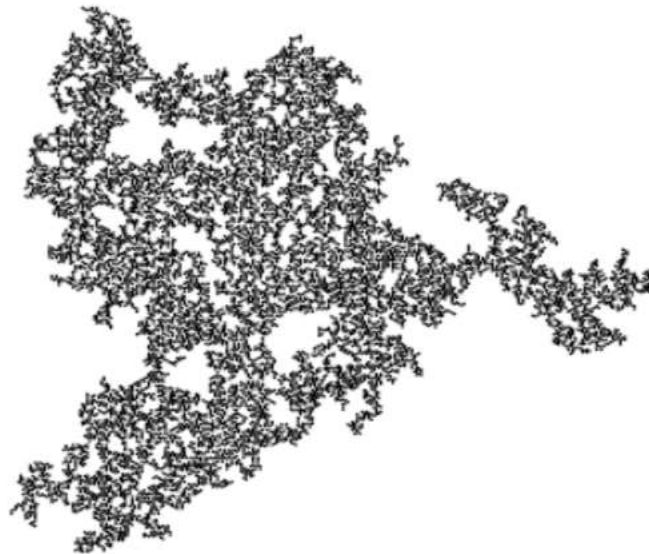
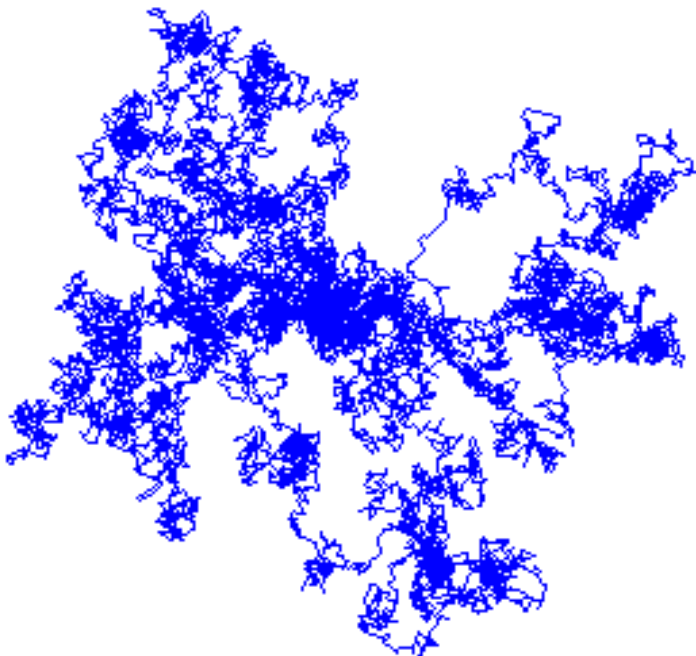


Найденное 4 студентами разбиение квадрата на квадраты разного размера:  
Ответ на знаменитый тогда вопрос

**Lawler, Schramm, Werner, Смирнов**

Кривая  $SLE(8/3)$ , которая описывает

- границу 2D Броуновского движения
- границу кластера просачивания
- (гипотеза) случайный полимер





# Математика в афинской школе (станцы Рафаэля)





# Зачем изучают математику в школе?

**Эллинистическая Греция:**  
любой гражданин  
(то есть не раб)  
должен изучить **семь  
свободных искусств.**  
(= «*практических наук*»)

**Тривиум:**

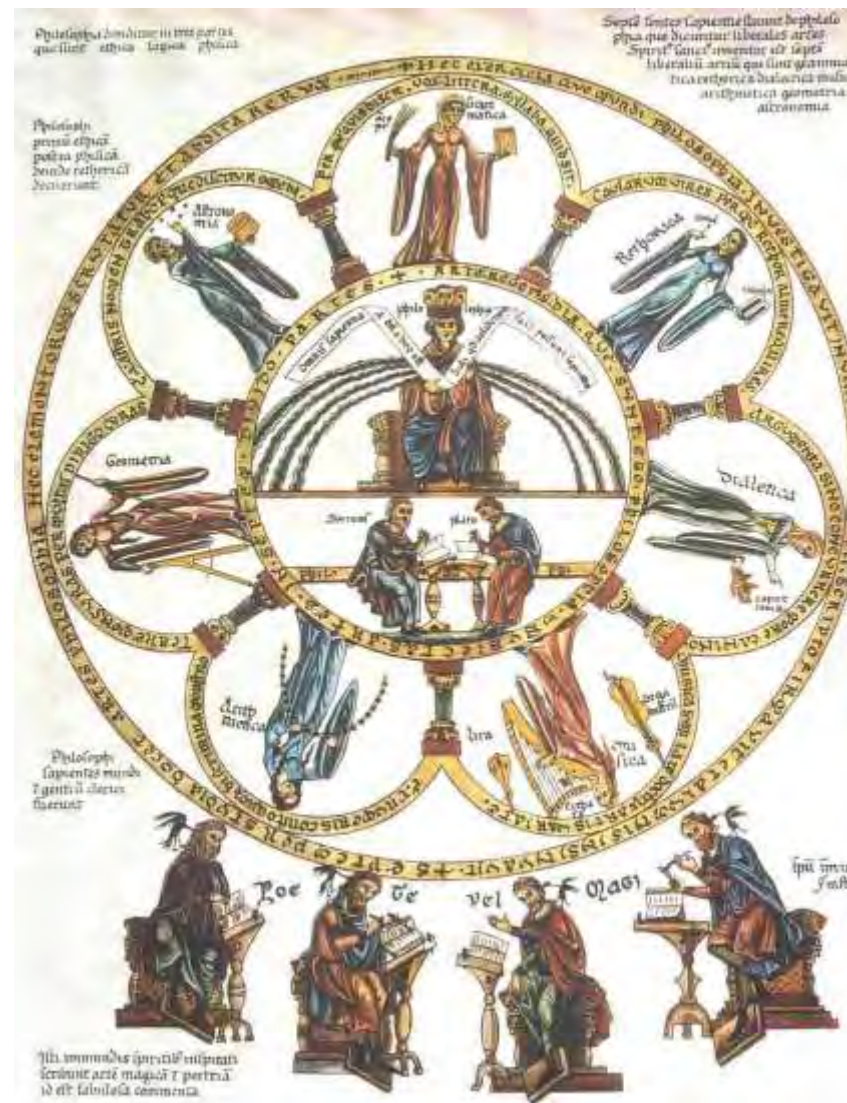
Грамматика **Логика** Риторика

**Квадривиум:**

Арифметика **Геометрия**

Музыка **Астрология**

В средние века необходимы  
для изучения права,  
медицины, богословия.



Миниатюра из «Hortus Deliciarum» Геррады  
Ландсбергской



# Зачем изучают математику в школе?

## Три причины:

- 1) Для развития мышления, логики, творческих способностей
- 2) Для применения в повседневной жизни (взять кредит в банке, посчитать дозировку лекарства)
- 3) Для применения в профессиональной жизни (от физики и биологии до банковского или инженерного дела)

Конкретные знания, которые должны быть в программе:

2) = то, что может понадобиться гражданину и важно для его культурного уровня

3) = то, что определяется дальнейшей образовательной траекторией и потребностями экономики

# Как надо преподавать математику

Для развития мышления (1) важны не конкретные области, а развивающий потенциал задач. И для будущих профессионалов (3) развитие творческих способностей важнее конкретного материала!

- Развиваем мышление, логику
- Важна творческая составляющая
- Много задач (не примеров и упражнений)
- Изложение должно быть интересным
- Привязка к повседневной жизни
- Привязка к другим наукам
- Закладываем базу для других предметов

# Как надо преподавать математику

Для развития мышления (1) важны не конкретные области, а развивающий потенциал задач. И для будущих профессионалов (3) развитие творческих способностей важнее конкретного материала!

- Развиваем мышление, логику
- Важна творческая составляющая
- Много задач (не примеров и упражнений)
- **Изложение должно быть интересным**
- **Привязка к повседневной жизни**
- **Привязка к другим наукам**
- Закладываем базу для других предметов

## Задача из повседневной жизни

Вася взял в долг 1 рубль под 4% в день.  
Сколько он должен вернуть через год ? (Примерно)

## Задача из повседневной жизни

Вася взял в долг 1 рубль под 4% в день.

Сколько он должен вернуть через год ?

Ответ:  $1,04^{365}$  , примерно 1'648'803 рубля !

**«Задача о шахматной доске»**





## Задача из повседневной жизни

Вася взял в долг 1 рубль под 4% в день.

Сколько он должен вернуть через год ?

Ответ:  $1,04^{365}$  , примерно 1'648'803 рубля !

**«Задача о шахматной доске»**

Петя вложил в акции 1'000'000 рублей под 4% в день.

Сколько он получит через год ?

1'648'803'000'000 рублей ?

## Задача из повседневной жизни

Вася взял в долг 1 рубль под 4% в день.

Сколько он должен вернуть через год ?

Ответ:  $1,04^{365}$  , примерно 1'648'803 рубля !

**«Задача о шахматной доске»**

Петя вложил в акции 1'000'000 рублей под 4% в день.

Сколько он получит через год ?

1'648'803'000'000 рублей ?

В математической задаче – да.

В реальном мире – нет, рублей в банке не хватит.

Проблема с математикой?

# Задача из повседневной жизни

Вася взял в долг 1 рубль под 4% в день.

Сколько он должен вернуть через год ?

Ответ:  $1,04^{365}$  , примерно 1'648'803 рубля !

## «Задача о шахматной доске»

Петя вложил в акции 1'000'000 рублей под 4% в день.

Сколько он получит через год ?

1'648'803'000'000 рублей ?

В математической задаче – да.

В реальном мире – нет, рублей в банке не хватит.

Но и с математикой все в порядке:

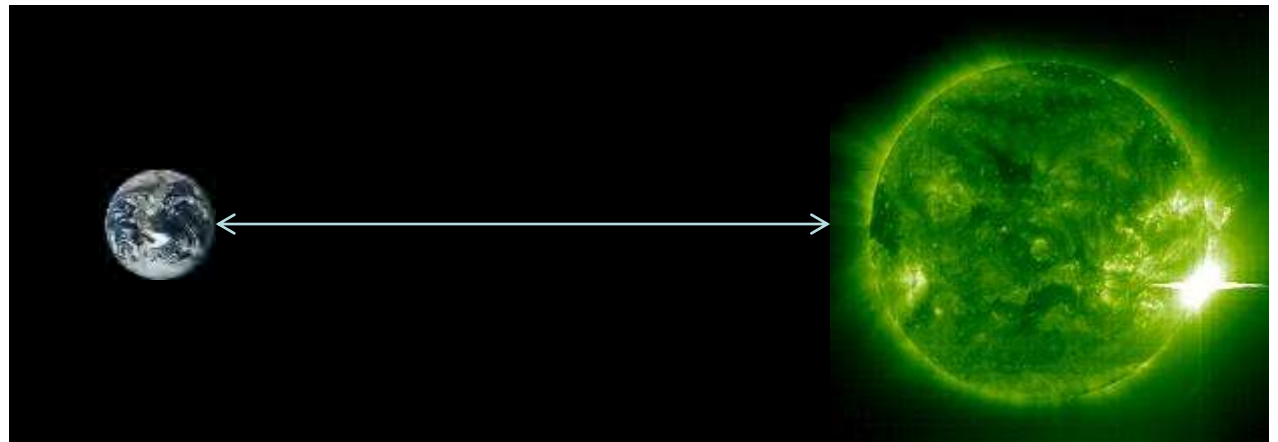
Ответ (*экспоненциальная функция*) получался из линейного уравнения  $X(t+1)-X(t)=0,04 X(t)$ .

Реальные уравнения линейны только в первом приближении, при больших числах надо менять задачу.

# Задача из астрономии

**Каково расстояние от Земли до Солнца:**

1) В диаметрах Земли? 2) В диаметрах Солнца?

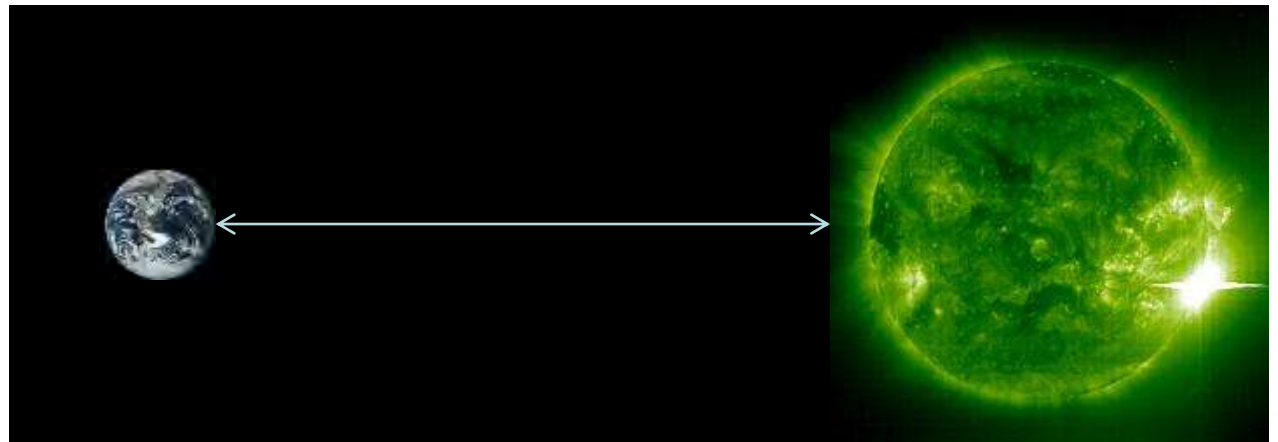


**Каково расстояние от Земли до Солнца:**

1) В диаметрах Земли? 2) В диаметрах Солнца?

1) = сложная задача (что и как мерять?)

И диаметр Земли, и расстояние до Солнца измерить не просто (но тригонометрия)



**Каково расстояние от Земли до Солнца:**

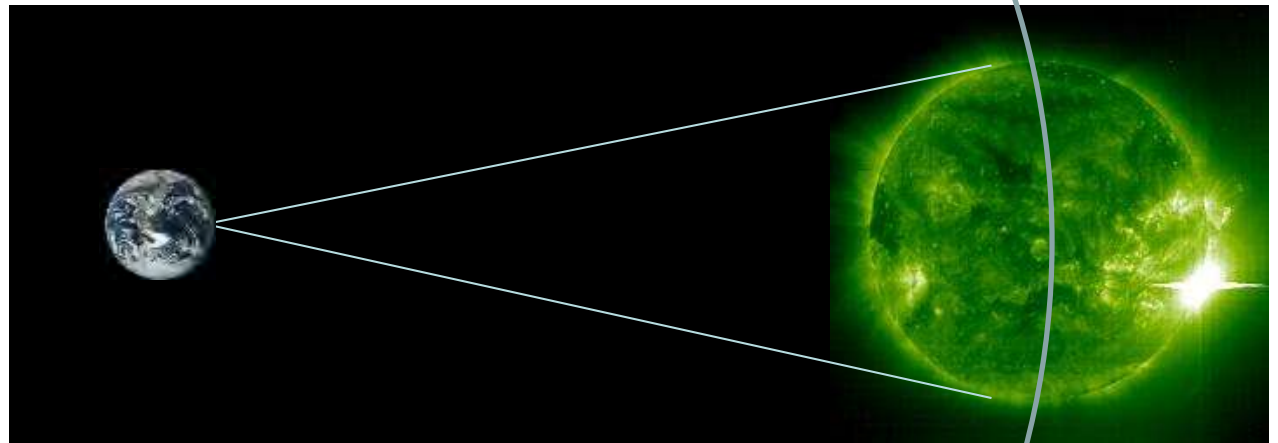
1) В диаметрах Земли? 2) В диаметрах Солнца?

1) = сложная задача (что и как мерять?)

2) = простая задача из тригонометрии:

можно сразу измерить *расстояние/диаметр*  
*угловой размер Солнца*  $32' = 0,0093$  радиан

ответ:  **$107,42 = 1 / 0,0093$**



**Каково расстояние от Земли до Солнца:**

1) В диаметрах Земли? 2) В диаметрах Солнца?

1) = сложная задача (что и как мерять?)

2) = простая задача из тригонометрии:

угловой размер Солнца  $32' = 0,0093$  радиан

ответ: **107,42**

***У этого наблюдения есть  
важное следствие:  
расстояние не такое уж  
и большое, и солнечные  
бури влияют на Землю***





# Задача из теории вероятностей

## Что такое случайность?

Одну группу студентов просят **подбросить монету сто раз** и записать результат как последовательность 0 и 1

Вторую группу просят **придумать «случайную»** последовательность из сотни 0 и 1

Какая настоящая случайная? Профессор всегда угадывает.

01101011110000111000111111010101101111111100110010  
00111111010101001100101011110010000001100111010001

00110000101000110010010001011101100100100011010010  
10100101011111000010100100100010010001001011111100

# Задача из теории вероятностей

## Что такое случайность?

Одну группу студентов просят подбросить монету сто раз и записать результат как последовательность 0 и 1

Вторую группу просят придумать «случайную» последовательность из сотни 0 и 1

Какая настоящая случайная? Профессор всегда угадывает.

01101011110000111000111111010101101111111100110010  
00111111010101001100101011110010000001100111010001

00110000101000110010010001011101100100100011010010  
1010010101111100001010010010001001000100101011111100

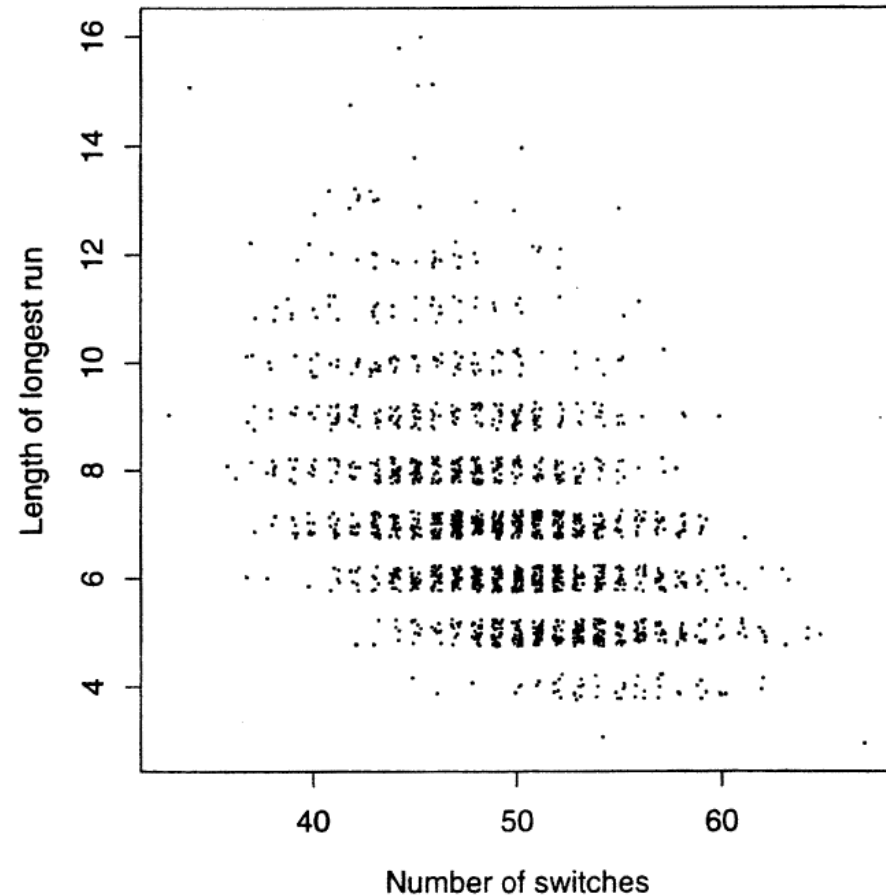
## Что такое случайность?

Изображая случайность, студенты интуитивно часто меняют цифру.

В настоящей случайности будут группы длиной **6-8**

Есть и другие признаки (Интересно: натренированный глаз сразу видит их, если раскрасить цифры)

01101011110000111000111111010101101111111100110010  
00111111010101001100101011110010000001100111010001  
00110000101000110010010001011101100100100011010010  
10100101011111000010100100100010010001001011111100



## Выбор лекарство и информация:

Есть три лекарства, процент успешности

1. **90%**
2. **95%**
3. **100%**

Какое выбрать?

## Выбор лекарство и информация:

Есть три лекарства, процент успешности

1. **90%** из **50000** больных (стандартное)

2. **95%** из **500** больных (новое)

3. **100%** из **5** больных (экспериментальное)

Какое выбрать?



## Выбор лекарство и информация:

Есть три лекарства, процент успешности

1. **90%** из **50000** больных (стандартное)

2. **95%** из **500** больных (новое)

3. **100%** из **5** больных (экспериментальное)

Какое выбрать?

*Простое вычисление:*

*допустим, третье лекарство работает в **88% случаев.***

*Тогда вероятность получения*

*пяти положительных результатов =  $0,88^5 = 52,8\%$*

*То есть **5 больных не дают достаточно информации***

Очень хорошая первая задача для курса статистики,

Сразу вовлекает студентов в обсуждение

# Как надо преподавать математику

- Развиваем мышление, логику
- Важна творческая составляющая
- Много задач (не примеров и упражнений)
- **Изложение должно быть интересным**
- **Привязка к повседневной жизни**
- **Привязка к другим наукам**
- Закладываем базу для других предметов

**А что после школы?**

**Нужны ли математики?**

## Математика после школы

*Of 200 Jobs studied, these came out on top -- and at the bottom:*

Интересная и  
востребованная  
специальность

**THE WALL STREET JOURNAL.**

– лучшая из 200!!

The Best	The Worst
1. Mathematician	200. Lumberjack
2. Actuary	199. Dairy Farmer
3. Statistician	198. Taxi Driver
4. Biologist	197. Seaman

Изучение математики расширяет выбор карьер: медицина, информационные технологии, нефтегазовая и аэрокосмическая отрасль, кораблестроение, банковское дело, фундаментальная наука, образование...



## 2015: новый бакалавриат «МАТЕМАТИКА»

- Все области современной математики и теоретической информатики, **фундаментальные и прикладные**
- Современная программа
- Прямой контакт с ведущими учеными мира
- Индивидуальные траектории обучения
- Обучение в центре Санкт Петербурга
- Общежития для иногородних, специальные стипендии

**ПРИСЫЛАЙТЕ УЧЕНИКОВ!!**





Санкт-Петербургский  
государственный  
университет

**СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!  
ПРИСЫЛАЙТЕ УЧЕНИКОВ В СПБГУ!**



Математика как наука и как школьный предмет