## XVIII Заочный конкурс учителей математики

### I. Решите задачи.

**№1.** Хулиган Вася в магазине «Всё для шахмат» из нескольких шахматных досок выломал по клеткам прямоугольники всевозможных размеров – по одному каждого вида (прямоугольники размеров $a\times b$ и $b\times a$ считаются одинаковыми, шахматная доска имеет размер $8\times 8$). Вася хочет сложить квадрат, используя все выломанные прямоугольники. Сможет ли он осуществить задуманное?

**№2.** Найдите $f(x)$, если известно, что эта функция имеет два нуля и её производная $f'(x) = x^2 + 2x - 3$.

**№3.** В трапеции $ABCD$ отмечена точка $X$ на боковой стороне $CD$. Докажите, что прямые, проходящие через $C$ и $D$ и параллельные прямым $AX$ и $BX$ соответственно, пересекаются на прямой $AB$.

**№4.** Решите уравнение: $\dfrac{-t^2}{\left(1-t^2\right)^2}\left(5+\dfrac{16t^2}{\left(1-t^2\right)^2}\right) = \dfrac{t^3+5t^2-t+t^2|t|+5t|t|-|t|}{16t^2+16t|t|}$.

**№5.** К потолку на нитке подвешен куб размером $n\times n\times n$, каждая грань которого разбита на $n^2$ единичных квадратных клеток. В начальный момент времени на поверхности куба сидят $6n^2$ муравьёв (каждый – целиком в какой-то клетке, при этом в одной клетке могут сидеть несколько муравьёв). Каждую секунду какие-то четыре муравья, находящиеся в одной клетке, расползаются по одному в четыре соседние по стороне клетки (если нет клеток с четырьмя муравьями, то перемещения прекращаются). Докажите, что при любом начальном расположении муравьёв через конечное число секунд найдётся по крайней мере $2n^2$ клеток, в каждой из которых сидит хотя бы один муравей.

### II. Методический блок.

*В заданиях №6 – №8 могут содержаться математические ошибки и недочёты (как в условиях «задач», так и в «ответах» и «решениях»). Укажите, корректно ли условие «задачи». Если оно некорректно, то объясните, почему это так. Если неверно «решение», то укажите все ошибки и недочёты, поясните их суть, а затем приведите верное решение.*

**№6.** «Задача». Решите систему уравнений $\begin{cases}\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{z}+\dfrac{z}{x}=3,\\ x+y+z=3,\\ \dfrac{x}{z}+\dfrac{z}{y}+\dfrac{y}{x}=3\end{cases}$.

«Ответ»: (1; 1; 1).

«Решение». Рассмотрим ненулевые векторы: $\bar{a}(x;y;z)$, $\bar{b}\left(\dfrac{1}{y};\dfrac{1}{z};\dfrac{1}{x}\right)$, $\bar{c}\left(\dfrac{1}{z};\dfrac{1}{x};\dfrac{1}{y}\right)$, $\bar{d}(1;1;1)$. Из первого уравнения следует равенство $\bar{a}\cdot\bar{b}=3$, из второго уравнения – $\bar{a}\cdot\bar{d}=3$, а из третьего – $\bar{a}\cdot\bar{c}=3$, Так как $\bar{a}\cdot\bar{b}=\bar{a}\cdot\bar{c}$, то $\bar{b}=\bar{c}$, значит, $y = z = x$. Аналогично, так как $\bar{a}\cdot\bar{b}=\bar{a}\cdot\bar{d}$, то $\bar{b}=\bar{d}$, поэтому $y = z = x = 1$.

**№7.** «Задача». Два выпуклых четырёхугольника пересекаются крест-накрест Стороны одного соответственно параллельны сторонам другого и отстоят друг от друга на расстоянии, равном 1. Докажите, что периметры этих четырёхугольников равны.

«Решение». Полученная фигура представляет собой четырёхугольник, на каждой стороне которого во внешнюю сторону построена трапеция (см. рис. 7а). Каждую из этих трапеций можно разбить на прямоугольник и два прямоугольных треугольника одним из двух способов (см. рис. 7 б, в). Тогда у каждых двух прямоугольных треугольников с общей вершиной острые углы при

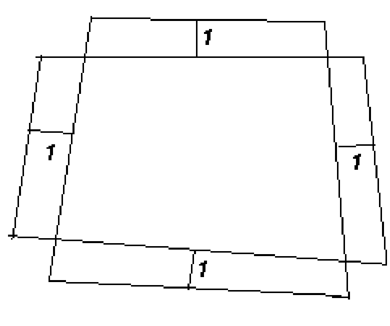

Рис. 7а

этой вершине равны (они либо вертикальные, либо с соответственно перпендикулярными сторонами). Следовательно, такие треугольники равны (по катету и острому углу). Заметим также, что четыре стороны образовавшихся прямоугольников лежат на контуре одного четырёхугольника, а противолежащие им стороны – на контуре другого.

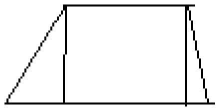

Рис. 7б

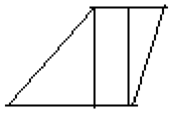

Рис. 7в

Таким образом, периметр каждого из исходных четырёхугольников является суммой соответственно равных попарно отрезков: четырёх гипотенуз прямоугольных треугольников, четырёх их соответствующих катетов и четырёх соответствующих сторон прямоугольников. Следовательно, эти периметры равны.

**№8.** «Задача». Малое предприятие выпускает изделия двух типов. Для изготовления изделия первого типа требуется 9 часов работы станка А и 11 часов работы станка Б. Для изготовления изделия второго типа требуется 13 часов работы станка А и 3 часа работы станка Б (станки могут работать в любой последовательности). По техническим причинам станок А может работать не более 130 часов в месяц, а станок Б не более 88 часов в месяц. Каждое изделие первого типа приносит предприятию 11 тыс. рублей прибыли, а каждое изделие второго типа – 13 тыс. рублей прибыли. Найдите наибольшую возможную ежемесячную прибыль предприятия.

«Ответ»: 144 тыс. рублей.

«Решение». Пусть *x* – число изделий первого типа, *y* – число изделий второго типа, *a* – прибыль предприятия. Тогда *a* = 11*x* + 13*y* ⇔ y = $\frac{11}{13}x+\frac{a}{13}$. Условия производства даются системой неравенств $\begin{cases} 9x+13y\le 130, \\ 11x+3y\le 88, \\ x,y\ge 0 \end{cases}$, где *x* и *y* – целые числа.

На координатной плоскости *Oxy* полученная система неравенств задаёт четырёхугольник *OABC* с внутренней областью, ограниченной осями координат и прямыми *y* = – $\frac{9}{13}x$ + 10 и *y* = – $\frac{11}{13}x+\frac{88}{3}$, где *O*(0; 0), *A*(0; 10), *B*(6,5; 5,5), *C*(8; 0). Так как $-\frac{11}{3}<-\frac{11}{13}<-\frac{9}{13}$, то наибольшее значение *a* будет достигаться, если прямая *y* = – $\frac{11}{13}x+\frac{a}{13}$ пройдёт через точку *B*, но тогда *x* и *y* целыми не будут. Следовательно, нужно взять одну из ближайших к *B* точек, имеющих обе целочисленные координаты и лежащих внутри *OABC*: *D*(6; 6) или *E*(6; 5). В первом случае: *a* = 6·11 + 6·13 = 144, а во втором: *a* = 6·11 + 5·13 = 131.

### III. Педагогический блок.

**№9.** Вы получали педагогическое образование или проходили курсы переподготовки, а также занимались на курсах повышения квалификации. Ответьте на следующие вопросы:

1) Какие курсы (лекции, семинары, практические занятия) Вам существенно пригодились в Вашей работе, а какие оказались практически бесполезными?

2) Какие курсы или занятия Вы бы добавили в систему педагогического образования и почему?