

XVII Заочный конкурс учителей математики

I. Решите задачи.

№1. Существует ли трёхзначное натуральное число, удовлетворяющее двум условиям:

- 1) цифры в его десятичной записи попарно различны;
- 2) на русском языке оно записывается тремя словами так, что все слова начинаются с одной и той же буквы?

№2. В клетках таблицы $n \times n$ записаны в произвольном порядке попарно различные числа. Сначала упорядочили по возрастанию числа в каждой строке, затем это же сделали в каждом столбце. Можно ли утверждать, что после второй операции числа в строках по-прежнему записаны в порядке возрастания?

№3. Про некоторое натуральное число k известно, что числа $(2k + 1)$ и $(3k + 1)$ – точные квадраты. Докажите, что k делится на 40.

№4. Найдите все значения параметра a , при которых на графике функции

$$f(x) = \frac{8x^2 + (12a - 5)x + 4a^2 - 3a}{2x^2 + 3ax + a^2}$$
 существуют такие четыре точки, что касательные к

графику $f(x)$, проведённые в них, параллельны прямой $y = x$.

№5. Два треугольника единичной площади, симметричные относительно некоторой точки O , в пересечении образуют шестиугольник. Найдите наибольшее значение его площади.

II. Методический блок.

№6. Магазин дает Наташе персональную скидку 20% при покупке дыни. А еще у Наташи в этом месяце есть скидка по акции – 5%, которая применяется после всех других скидок и действует на весь чек. Наташа сходила в магазин и купила дыню весом 4,325 кг. Ей дали бумажный чек и еще прислали электронный чек в приложении. На бумажном чеке было написано:

Дыня Торпеда, кг

$$66.50 \times 4.325 = 287.61$$

$$\text{скидка} = 15.14$$

$$\text{Итого к оплате: } 287.61$$

Скидки:

$$- \text{Акция } 15.14$$

$$- \text{Персональная скидка } 18.00$$

$$\text{Ваша скидка составила } 33.14$$

$$\text{ИТОГ: } 287.61$$

В приложении было написано так:

$$\text{Покупка: } 287.61\text{р.}$$

$$\text{Скидка по акции: } 15.14\text{р.}$$

$$\text{Дыня Торпеда } 4.325\text{кг} \times 70.00 \text{ (Розничная Цена – } 88.00) = 302.75\text{р. (Скидка } 77.85\text{р.)}$$

$$\text{ИТОГО СКИДКА: } 77.85\text{р.}$$

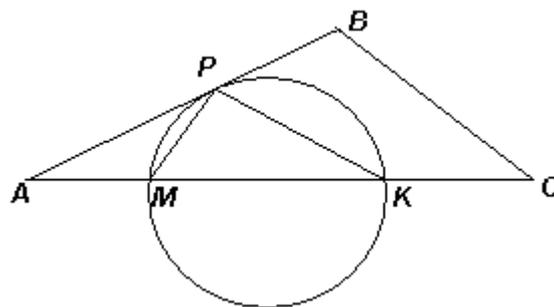
Найдите все ошибки в чеках. Правильно ли Наташе подсчитали скидки? И сколько же в итоге составила скидка?

В заданиях №7 и №8 могут содержаться математические ошибки и недочёты (как в условиях «задач», так и в «ответах» и «решениях»). Укажите, корректно ли условие «задачи». Если оно некорректно, то объясните, почему это так. Если неверно «решение», то укажите все ошибки и недочёты, поясните их суть, а затем приведите верное решение.

№7. «Задача». В треугольнике ABC на стороне AC отмечены точки M и K на расстоянии 2 и 6 от вершины A соответственно. Найдите радиус окружности, проходящей через точки M и K , и касающейся прямой AB , если $\angle BAC = 30^\circ$.

«Ответ»: 2.

«Решение». Пусть P – точка касания AB и окружности (см. рисунок). По свойству касательной и секущей, проведенных из одной точки к окружности: $AP^2 = AK \cdot AM$, то есть $AP = \sqrt{12}$.



Из треугольника APM по теореме косинусов:
 $PM^2 = AP^2 + AM^2 - 2 \cdot AP \cdot AM \cdot \cos \angle BAC =$
 $= 12 + 4 - 2 \cdot \sqrt{12} \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 4$. Значит, $PM = 2 = AM$, то

есть треугольник APM – равнобедренный. Тогда $\angle APM = \angle BAC = 30^\circ$, а $\angle PMK = 60^\circ$ (по свойству внешнего угла треугольника). Так как APM – угол между касательной и хордой, а PKM – вписанный угол, опирающийся на дугу PM , то $\angle PKM = \angle APM = 30^\circ$. Тогда угол MPK – прямой, значит, MK – диаметр данной окружности. Но $MK = AK - AM = 4$, поэтому искомый радиус окружности равен 2.

№8. Попарно различные действительные числа x_1, x_2, \dots, x_n таковы, что $x_1^{n-2}(x_1 - 1)^2 = x_2^{n-2}(x_2 - 1)^2 = \dots = x_n^{n-2}(x_n - 1)^2$. При каждом натуральном $n > 1$ найдите сумму $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$.

«Ответ»: 2.

«Решение». Данные числа являются корнями многочлена $x^{n-2}(x - 1)^2 - c$, где $c = x_i^{n-2}(x_i - 1)^2$. Приведем его к стандартному виду: $x^n - 2x^{n-1} + x^{n-2} - c$. Тогда, используя теорему Виета, получим: $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = (x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + \dots + x_{n-1}x_n) = 2^2 - 2 \cdot 1 = 2$.

III. Аналитический блок.

№9. Не секрет, что содержание работы учителя в значительной степени зависит от содержания независимых экзаменов (в настоящий момент, это ЕГЭ и ОГЭ). Давайте предположим, что Ваши ученики не должны сдавать никакие экзамены (и нет других форм внешнего контроля Вашей работы), а Вы просто хотите научить их математике.

Как бы Вы изменили содержание своей работы?

- 1) Какие разделы или темы школьной программы Вы бы не стали изучать вообще?
- 2) Изучение каких разделов или тем Вы бы существенно сократили?
- 3) Какие разделы или темы, которых в программе сейчас нет, Вы бы добавили?
- 4) Изучение каких разделов или тем существующей программы Вы бы расширили?
- 5) Изменили бы Вы методику (технологии) своей работы со школьниками? Если да, то как именно?

Свои ответы в каждом пункте, пожалуйста, обоснуйте. Не забудьте указывать классы, в работу с которыми Вы бы вносили те или иные изменения.