

XVII Заочный конкурс учителей математики

I. Решите задачи.

№1. Перед Атосом стояло шесть бокалов вина, которые он осушает один за другим. В четыре бокала Миледи подсыпала яд. Атос умрёт, если выпьет два отравленных бокала. Он уже выпил два бокала и пока жив. Каковы его шансы выжить, если он выпьет ещё один бокал?

№2. Решите уравнение: $\sqrt{4 - \sqrt{4 + x}} = x$.

№3. В ряд стоят шашки двух цветов: красного и синего. Если между двумя шашками находится ровно 10 или ровно 15 шашек, то такие две шашки одного цвета. Найдите наибольшее возможное количество шашек в этом ряду.

№4. Центр окружности, вписанной в четырехугольник, является серединой отрезка, соединяющего середины его диагоналей. Обязательно ли в этом четырехугольнике есть равные стороны?

№5. В 1979 году учитель пришел в гастроном и купил там 4 товара. Кассирша сосчитала их общую стоимость на калькуляторе, и у нее получилось 9,27 р. В этот момент она заметила, что ошиблась и вместо кнопки «+» нажимала на кнопку «×». Однако когда она пересчитала стоимость товаров уже без ошибки, у нее снова получилось 9,27 р.. Сколько стоил самый дорогой из четырех купленных товаров? (Все результаты на калькуляторе точные, а не округлённые, стоимость каждого товара составляет целое число рублей и целое число копеек).

II. Методический блок.

В заданиях №6 и №7 могут содержаться математические ошибки (как в условиях «задач», так и в «ответах» и «решениях»). Если некорректно условие «задачи», то объясните, почему это так. Если неверно «решение», то укажите все ошибки и недочёты, поясните их суть, а затем приведите верное решение.

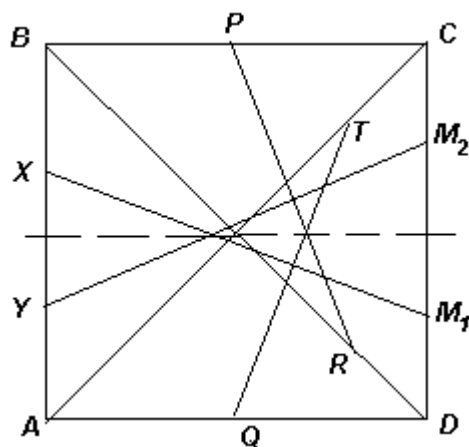
№6. «Задача». Житель страны Ш. считается богатым, если его месячный доход выше зарплаты министра финансов, иначе – небогатым. Известно, что богатые женихи предпочитают небогатых невест. Докажите, что если доходы у всех женихов и невест разные, то можно установить министру финансов такую зарплату, чтобы в стране стало поровну богатых женихов и небогатых невест.

«Решение». Пусть в стране M женихов, а женихов и невест вместе N . Пронумеруем всех женихов и невест в порядке увеличения зарплаты числами от 1 до N . Установим министру финансов зарплату больше, чем у M -го, но не больше, чем у $(M + 1)$ -го жителя. Пусть при этом K женихов стали небогатыми. Тогда $M - K$ женихов стали богатыми, а $M - K$ невест стали небогатыми, что и требовалось

№7. «Задача». Дан бумажный квадрат $ABCD$. На стороне CD отмечены такие точки M_1 и M_2 , что $DM_1 = CM_2 = \frac{1}{4} CD$.

Согнем квадрат так, чтобы сгиб проходил через точку M_1 , а середина AD попала на диагональ AC . Разогнем лист, обозначив M_1X отрезок сгиба. Теперь согнем квадрат так, чтобы сгиб проходил через точку M_2 , а середина BC попала на диагональ BD . Разогнем лист, обозначив M_2Y отрезок сгиба. Докажите, что точки X и Y симметричны относительно прямой, проходящей через середины сторон AB и CD .

«Решение». Пусть P – середина BC , Q – середина AD , R – точка, симметричная точке Q относительно M_1X , а точка T симметрична P относительно M_2Y (см. рис.). Заметим, что точки P и Q симметричны относительно указанной прямой M (отмечена пунктиром). Диагонали квадрата также симметричны друг другу относительно этой же прямой, симметричны и точки M_1 и M_2 , поэтому симметричны точки T и R .



Следовательно, относительно указанной прямой симметричны линии сгиба M_1X и M_2Y , то есть симметричны точки X и Y .

№8. Для контрольной работы учитель хочет использовать задачу с таким сюжетом: «Из пунктов A и B навстречу друг другу одновременно выбежали два гонца с постоянными скоростями. Добежав до конца они немедленно поворачивали обратно. Первый раз они встретились в a км от A , а второй раз – в b км от B . Найдите расстояние между A и B ».

А) Какое соотношение между a и b он должен учесть при выборе их числовых значений?

Б) В каких границах будет отношение скоростей гонцов в этом случае?

III. Аналитический блок.

№9. Одна из больших проблем обучения геометрии в 7 классе – содержание первых уроков, то есть как изучать аксиомы планиметрии. Существуют различные подходы к решению этой проблемы (в том числе, и в разных школьных учебниках). Некоторые учителя считают, что надо подробно изучить аксиомы, потребовать, чтобы школьники их выучили, и только после этого двигаться дальше. Другие, наоборот, считают, что эту тему надо быстрее «проскочить» и заняться содержательными фактами и задачами, а к аксиомам вернуться в конце изучения курса (или не возвращаться вообще).

Проанализируйте плюсы и минусы этих подходов. Предложите своё решение этой проблемы.