XV Заочный конкурс учителей математики

I. Решите задачи.

№1. Вовочка покрасил со всех сторон несколько маленьких кубиков и сложил из них большой куб. Могло ли на поверхности куба оказаться ровно 12% затраченной краски?

№2. При каком наименьшем натуральном k выполняется неравенство: $\sin k < \sin(k+1) < \sin(k+2) < \sin(k+3)$? Обоснуйте ответ, не используя калькулятор.

№3. Функция $f(x)$ такова, что при любом $x \neq 0$ выполняется равенство $f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=x^2$. Найдите все такие $f(x)$.

№4. В остроугольном треугольнике ABC проведена медиана BM. Прямые a_1 и c_1 симметричны прямой BM относительно прямых AB и BC соответственно. На прямые a_1 и c_1 соответственно опущены перпендикуляры AA_1 и CC_1. Прямые AA_1 и CC_1 пересекаются в точке K. Докажите, что если $AA_1 = AK$, то центр O описанной окружности треугольника ABC равноудалён от точек K и C_1.

№5. В однокруговом турнире математических боев участвовало N команд. За победу давалось 2 очка, за ничью – 1, за поражение – 0. При этом любые три команды в играх между собой набрали попарно различное количество очков. Каково наибольшее количество ничьих могло быть в этом турнире?

II. Методический блок.

В предложенных текстах (№6 и №7) могут содержаться математические ошибки (как в условиях «задач», так и в «ответах» и «решениях»). Если некорректно условие «задачи», то объясните, почему это так. Если неверно только «решение», то укажите все ошибки и приведите верное решение.

№6. «Задача». Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $ax^2 + (3 + 4a)x + 2a^2 + 4a + 3 = 0$ имеет только целые корни.

«Ответ»: при $a \in \{\pm 1; \pm 3\}$.

«Решение». Если корни уравнения целые, то их сумма и их произведение – целые числа. Используя теорему Виета, получим: $-\frac{3+4a}{a} = -\frac{3}{a}+4$ – целое число и $\frac{2a^2+4a+3}{a} = 2a+4+\frac{3}{a}$ – целое число. Так как числа $2a$, – 4 и 4 – целые, то $\frac{3}{a}$ должно быть целым числом. Следовательно, $a = \pm 1$ или $a = \pm 3$.

№7. «Задача». В единичный квадрат бросили 101 точку, причём никакие три из них не лежат на одной прямой. Докажите, что найдется треугольник с вершинами в этих точках, площадь которого не превосходит 0,01.

«Решение». Выберем произвольную точку и соединим ее со всеми остальными, – получится 100 отрезков. Выберем направление по часовой стрелке и последовательно соединим концы отрезков – получится 100 непересекающихся треугольников, суммарная площадь которых не превосходит 1. По принципу Дирихле, найдется треугольник площади не больше, чем 0,01.

№8. *В одном из печатных источников было опубликовано решение знаменитой «открытой» проблемы о простых числах-близнецах*.

«Теорема». Пар простых чисел, отличающихся на 2, бесконечно много.

«Доказательство». Евклид доказал, что какое бы простое число p мы не взяли, найдется простое число $q = 2\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot p + 1 > p$, то есть наибольшего простого числа не существует.

Рассмотрим число $r = 2\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot p - 1$, которое также является простым и отличается на 2 от q, то есть $(r; q)$ – пара простых чисел «близнецов». Но значений p бесконечно много, значит, таких пар бесконечно много.

Прокомментируйте это рассуждение.

III. Аналитический блок.

№9. В нынешних учебниках стало модным формулировать задание в виде: «Постройте математическую модель». Это почти всегда означает: «Составьте уравнение по условию задачи». Но, кроме уравнений и их «родственников» – неравенств, систем, алгебраических выражений и формул, есть и другие математические модели. Приведите несколько примеров математических моделей, отличных от перечисленных, построению которых разумно учить школьников на уроке, факультативе или кружке. Для каждого типа модели приведите по одной задаче и покажите, как задача сводится к указанной модели.