XII Заочный конкурс учителей математики

I. Решите задачи.

№1. Некоторое количество конфет семи различных сортов, где конфет каждого сорта одно и то же, разложили по пяти вазам. В первую вазу положили 6 конфет – меньше, чем в любую из остальных ваз, а во вторую – 11 конфет – больше, чем в любую из остальных ваз. Сколько конфет каждого сорта раскладывали?

№2. Вася разобрал каркас куба, чтобы сделать из него тетраэдр, используя все ребра каркаса (одно ребро тетраэдра может содержать несколько рёбер куба). Сколькими способами Вася может собрать тетраэдр? (*Способы считаются различными, если при сборке получаются неравные тетраэдры*.)

№3. Три положительных числа x, y и z таковы, что $x^2 + y^2 + z^2 = 3$. Докажите неравенство: $\frac{1}{xy+1}+\frac{1}{yz+1}+\frac{1}{zx+1} \geq \frac{3}{2}$.

№4. Вначале на доске записано число 2016. Каждым ходом число можно уменьшить на любую из его ненулевых цифр. Вася называет любое натуральное число N от 1 до 2000, после чего Петя и Вася ходят по очереди, начинает Петя. Выигрывает тот, кто после своего хода получит число, меньшее N. Может ли Вася назвать такое N, для которого он гарантированно выиграет?

№5. В треугольнике ABC угол B равен 70°, а угол C равен 50°. На сторонах AB и AC отмечены точки M и N соответственно так, что $\angle MCB$ = 40°, а $\angle NBC$ = 50°. Найдите угол NMC.

II. Методический блок.

В предложенных текстах (№6 и №7) могут содержаться математические ошибки (как в условиях «задач», так и в «ответах» и «решениях»). Если некорректно условие «задачи», то объясните, почему это так. Если неверно только «решение», то укажите все ошибки и приведите верное решение.

№6. «Задача». Натуральное число разрешено увеличивать на любое целое число процентов от 1 до 100, если при этом получается также натуральное число. Найдите наименьшее натуральное число, которое нельзя при помощи таких операций получить из числа 1.

«Ответ»: 203.

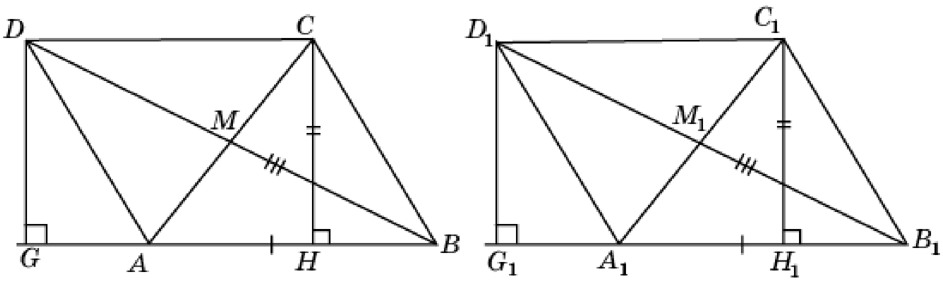
«Решение». Сначала научимся получать числа от 2 до 200. Из числа 1 можно получить 2, увеличив его на 100%. Из числа 2 можно получить 3 и 4, увеличив его на 50% и 100% соответственно. Из числа 4 можно получить 5, увеличив его на 25%. Из числа 5 можно получить любое число от 6 до 10, увеличивая его на число процентов, кратное двадцати. Из числа 10 можно получить любое число от 11 до 20, увеличивая его на число процентов, кратное десяти. Аналогично, из числа 20 – любое число от 21 до 25, из 25 – числа от 26 до 50, из 50 – от 51 до 100, из 100 – от 101 до 200.

Далее, число 201 – это число 134, увеличенное на 50%, а число 202 – увеличенное на 1% число 200. Докажем, что простое число 203 получить нельзя. В самом деле, если 203 получено из числа m увеличением на n процентов, то 203 = $m+\frac{mn}{100}$. Тогда 20300 = $m(100 + n)$. Один из сомножителей правой части делится на 203. Так как $m < 203$, то на 203 делится $100 + n$. Но тогда мы увеличивали m на n >100 процентов – противоречие.

№7. «Задача». Докажите, что если у треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ равны стороны AB и A_1B_1, равны высоты CH и C_1H_1 и равны медианы BM и B_1M_1, то такие треугольники равны.

«Решение». Продолжим медианы BM и B_1M_1 за точки M и M_1 соответственно и отложим отрезки $MD = BM$ и $M_1D_1 = B_1M_1$ (см. рис.). Получим параллелограммы $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$. Из вершин D и D_1 опустим перпендикуляры DG и D_1G_1 на прямые AB и A_1B_1 соответственно. Тогда $DG = CH = C_1H_1 = D_1G_1$, значит, равны прямоугольные треугольники BDG и $B_1D_1G_1$ (по гипотенузе и катету). Следовательно, $\angle DBG = \angle D_1B_1G_1$.

Треугольники ABM и $A_1B_1M_1$ равны по двум сторонам и углу между ними ($AB = A_1B_1$, $BM = B_1M_1$, $\angle ABM = \angle A_1B_1M_1$). Тогда $AM = A_1M_1$ и $\angle BAM = \angle B_1A_1M_1$. Из равенства отрезков AM и A_1M_1 следует, что $AC = A_1C_1$. Таким образом, в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$: $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$. Следовательно, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.



№8. Учитель Серафим Полуэктович, жалея детей, хочет подобрать для функции вида $y = \dfrac{x^2 + ax + b}{x^2 + cx + d}$ целые значения коэффициентов так, чтобы точки пересечения графика с осями, нули знаменателя, точки экстремумов и точки перегиба графика присутствовали и были рациональными. Конечно, без кратных корней в числителе и в знаменателе (он жалеет детей, но не до такой же степени!). Сможет ли учитель это сделать?

Ответьте на вопрос и приведите ход Ваших рассуждений.

III. Аналитический блок.

№9. Основу программы по математике в 5 и 6 классах составляют три раздела::
1) «Действия с десятичными дробями»,
2) «Действия с обыкновенными дробями»,
3) «Действия с отрицательными числами и числами с разными знаками».

В различных учебниках математики (а иногда, и в разных изданиях одного и того же учебника) выбирается различная последовательность расположения этих разделов по отношению друг к другу.

Опишите «плюсы» и «минусы» изучения этих разделов в различном порядке и обоснуйте свою точку зрения. Какой порядок их изучения выберете Вы и почему?