Задачи по алгебре. I курс, весна 1999 года.
Листок № 11.

1) Доказать, что матрица оператора $\Lambda^k(f)$ в базисе (e_I) (где $e_I = e_{i_1}\wedge\dots\wedge e_{i_k}$ для $I=\{i_1,\dots,i_k\}$ с $i_1<\dots<i_k$) есть матрица миноров k-того порядка матрицы f.

2) Выразите $\mathrm{tr}(\Lambda^k(f))$ через коэффициенты характеристического многочлена оператора $f:V\to V$.

3) Доказать, что производящая функция для выражений $\mathrm{tr}(S^k(f))$ (где $k = 0,1,2,\dots$) вычисляется через коэффициенты характеристического многочлена оператора f по формуле $\sum_{k\geq 0}\mathrm{tr}(S^k(f))\cdot z^k = \frac{1}{\det(E-zf)}$.

4) Постройте канонический изоморфизм $\bigoplus_{k=0}^n \Lambda^k(U)\otimes\Lambda^{n-k}(V)\to\Lambda^n(U\oplus V)$.

5) Доказать, что подпространство $ST^k(V)\subset(V)^{\otimes k}$ линейно порождается тензорами вида $v^{\otimes k}$, где v пробегает пространство V.

6) Доказать, что линейные операторы из $\mathrm{End}(V^{\otimes k})$, перестановочные с действием всех перестановок $\sigma\in S_k$, составляют линейное подпространство, которое порождается операторами вида $f^{\otimes k}$ по всем $f\in\mathrm{End}(V)$.

7) Элементы пространства $\Lambda^k(V)$ называют *поливекторами* (в данном случае k-*векторами*). Поливектор $\omega \in \Lambda^k(V)$ называется *разложимым*, если он равен внешнему произведению обычных векторов: $\omega = v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_k$. Доказать, что бивектор ω в четырёхмерном пространстве V тогда и только разложим, когда $\omega \wedge \omega = 0$ (при $\operatorname{char} \Bbbk \neq 2$).

8) Пусть $\dim V = n$. По данному $\omega \in \Lambda^k(V)$ построим два подпространства $\Omega = \{\xi \in V^* \mid i_\xi(\omega) = 0\} \subset V^*$ и $W = \{v \in V \mid v \wedge \omega = 0\} \subset V$. Доказать, что следующие условия на поливектор $\omega \in \Lambda^k(V)$ попарно эквивалентны:

   а) ω разложим;

   б) $\dim W = k$;

   в) $\dim \Omega = n - k$;

   г) $\operatorname{Ann} \Omega = W$;

   д) $\forall \xi \in \Lambda^{k+1}(V^*) \qquad c_{11}\big(c_{\{1,2,\ldots,k\}\{1,2,\ldots,k\}}(\xi \otimes \omega) \otimes \omega\big) = 0$ в $\Lambda^{k-1}(V)$;

   е) $\forall \xi \in \Lambda^{k-1}(V^*) \qquad c_{\{1,2,\ldots,k-1\}\{1,2,\ldots,k-1\}}(\xi \otimes \omega) \wedge \omega = 0$ в $\Lambda^{k+1}(V)$.

   (Через $c_{IJ}t$ обозначается свертка тензора t по множеству I верхних индексов и множеству J нижних индексов; $\Lambda(V)$ отождествляется с $\Lambda T(V)$.)

   Перепишите условия из пунктов д) и е) в виде явного конечного набора квадратичных соотнощений на координаты поливектора в стандартом базисе e_I.