В. А. Васильев

Топология

Специальный курс, весенний семестр 1998 г.

1 Лекция 8

Когомологические операции

На прошлой лекции было дано определение когомологической операции. Пусть задан набор (n, G, m, F), где n, m — целые числа, G, F — абелевы группы. Когомологическая операция типа (n, G, m, F) — это правило, которое любому топологическому пространству X и любому элементу группы $H^n(X, G)$ сопоставляет элемент группы $H^m(X, F)$, причем это сопоставление функториально по X. Функториальность означает следующее. Отображение $f : X \to Y$ индуцирует отображения

$$\begin{array}{ccc} H^n(X,G) & \leftarrow & H^n(Y,G) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^m(X,F) & \leftarrow & H^m(Y,F). \end{array}$$

Эта диаграмма должна быть коммутативной.

Простейшие примеры когомологических операций — возведение в степень и гомоморфизм Бокштейна.

Теорема 1 *Группа всех когомологических операций типа (n, G, m, F) изоморфна группе $H^m(K(G, n), F)$.*

Из этого утверждения, в частности, следует, что когомологические операции могут только повышать размерность (или сохранять).

Раньше была доказана такая теорема:

$$H^n(X, G) = \Pi(X, K(G, n)). \tag{1}$$

Напомню, как реализуется это равенство. В $H^n(K(G, n), G)$ есть тавтологический класс τ, сопоставляющий любому n-мерному циклу его собственный класс в $G = \pi_n(K(G, n))$. Для каждого класса $\alpha \in H^n(X, G)$ можно построить отображение $X \to K(G, n)$ так, чтобы оно индуцировало класс α из тавтологического класса. Это отображение определено однозначно с точностью до гомотопии. Получаем отображение $H^n(X,G) \to \Pi(X, K(G,n))$. Оно взаимно однозначно.

Если имеется когомологическая операция типа (n, G, m, F), то для любого топологического пространства X любому элементу α группы $H^n(X,G)$ сопоставляется элемент группы $H^m(X,F)$. В частности, тавтологическому элементу $\tau \in H^n(K(G,n),G)$ соотносится некоторый элемент $\sigma \in H^m(K(G,n),F)$. Этим элементом σ наша операция полностью определяется. Действительно, любому X и любому $\alpha \in H^n(X,G)$ в силу (1) соответствует отображение $\tilde{\alpha} : X \to K(G,n)$, индуцирующее класс α из тавтологического. В силу функториальности, результат нашей когомологической операции, примененной к α, должен равняться элементу, индуцированному этим отображением из класса σ. Элемент σ может быть выбран произвольно, поэтому получаем взаимно однозначное соответствие между элементами $H^m(K(G,n),F)$ и когомологическими операциями типа (n, G, m, F).

Обычно все встречающиеся в приложениях когомологические операции обладают свойством *стабильности.*

Стабильные когомологические операции

Для $n > 0$ (или для приведенных когомологий) имеются надстроечные изоморфизмы $H^n(X,G) \simeq H^{n+1}(\Sigma X, G,)$ где ΣX — надстройка над X. Если имеются когомологические операции типа (n, G, m, F) и $(n+1, G, m+1, F)$, то получаем диаграмму

$$\begin{array}{ccc} H^n(X,G) & \to & H^m(X,F) \\ \wr\wr & & \wr\wr \\ H^{n+1}(\Sigma X,G) & \to & H^{m+1}(\Sigma X,F), \end{array} \qquad (2)$$

в которой вертикальные изоморфизмы — надстроечные.

Определение 1 Стабильная когомологическая операция *типа* (G, q, F) *— это набор когомологических операций типа* (n, G, m, F) *с* $m - n = q$ *(для всех* $n > 0$*), такая что для любого* n *и любого* X *соответствующая диаграмма (2) коммутативна.*

Стабильные когомологические операции обладают рядом свойств, которые помогают их вычислять.

1) Стабильные когомологические операции коммутируют с точной последовательностью пары.

Для клеточной пары (X,Y) возникают точные последовательности

$$\begin{array}{ccccccccc}
\leftarrow & H^n(Y,G) & \leftarrow & H^n(X,G) & \leftarrow & H^n(X/Y,G) & \leftarrow & H^{n-1}(Y,G) & \leftarrow \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
\leftarrow & H^{n+q}(Y,F) & \leftarrow & H^{n+q}(X,F) & \leftarrow & H^{n+q}(X/Y,F) & \leftarrow & H^{n+q-1}(Y,F) & \leftarrow
\end{array}$$

(связанные вертикальными стрелками, заданными нашей операцией). Из определений легко следует, что эта диаграмма коммутативна. Стабильность нужна только для доказательства коммутативности тех квадратов, где гомоморфизмы изменяют размерность.

2) Трансгрессивность.

Пусть есть расслоение $E \xrightarrow{\Phi} B$ с односвязной базой. Тогда есть спектральная последовательность, сходящаяся к когомологиям базы. В этой спектральной последовательности есть отображение трансгрессии. Пусть элемент $\alpha \in H^n(\Phi) \equiv E_2^{0,n}$ трансгрессивен, т.е. лежит в ядрах всех дифференциалов спектральной последовательности кроме, может быть, последнего, действующего в клетку $E^{n+1,0}$. Тогда корректно определено его отображение трансгрессии в эту клетку. Пусть φ — стабильная когомологическая операция. Тогда $\varphi(\alpha) \in H^{n+q}(\Phi)$.

Утверждение 1 *Если элемент α трансгрессивен, то элемент $\varphi(\alpha)$ тоже трансгрессивен и $\varphi(t(\alpha)) = t\varphi(\alpha)$, где t — отображение трансгрессии.*

3) Характеризация в терминах $K(\Pi, n)$.

Имеется отображение $\Sigma K(\Pi,n) \equiv \Sigma\Omega K(\Pi,n+1) \to K(\Pi,n+1)$. Это отображение устроено следующим образом. Каждая точка пространства $\Sigma\Omega K(\Pi,n+1)$ представляется парой (t,φ), где $t \in [0,1]$ и $\varphi : [0,1] \to K(\Pi,n+1)$ (причем все точки надстройки кроме двух "вершин" представляются так однозначно). Такую пару (t,φ) мы отображаем в точку $\varphi(t)$.

Возникает последовательность отображений когомологий

$$\to H^m(K(\Pi,n),F) \to H^{m-1}(K(\Pi,n-1),F) \to H^{m-2}(K(\Pi,n-2),F) \to$$

В одну сторону эта последовательность конечна, в другую бесконечна. Можно взять обратный предел этой последовательности, т.е. множество всех наборов элементов всех групп последовательности , переходящих последовательно друг в друга при отображениях.

Теорема 2 *Множество всех стабильных когомологических операций типа* $(\Pi, m-n, F)$ *находится во взаимно однозначном соответствии с индуктивным пределом этой последовательности.*

Это позволяет легче вычислять группы всех стабильных когомологических операций, чем теорема 1, действующая в случае произвольных операций.

Самые знаменитые когомологические операции — квадраты Стинрода. В этом случае группы Π и F равны $\mathbf{Z}_2$. (Для других групп коэффициентов тоже есть такие операции, но ими пользуются менее часто.)

Квадраты Стинрода Sq^i, $i = 0, 1, 2, \ldots$, являются *аддитивными гомоморфизмами*

$$Sq^i : H^n(X, \mathbf{Z}_2) \to H^{n+i}(X, \mathbf{Z}_2).$$

Они обладают следующими свойствами:

$Sq^0 = \mathrm{Id}$.

Если $\alpha \in H^n(X, \mathbf{Z}_2)$, то $Sq^0(\alpha) = \alpha$, $Sq^n(\alpha) = \alpha^2$ и $Sq^i(\alpha) = 0$ при $i > n$.

$Sq^1(\alpha) = \beta\alpha$, где β — гомоморфизм Бокштейна для последовательности

$$0 \to \mathbf{Z}_2 \to \mathbf{Z}_4 \to \mathbf{Z}_2 \to 0.$$

(Можно проверить, что β — стабильная операция.)

Утверждение 2 *Операции Стинрода, если они есть, то определяются этими свойствами однозначно.*

Чтобы доказать это утверждение, рассмотрим расслоение Серра $E \overset{K(\mathbf{Z}_2, n-1)}{\longrightarrow} K(\mathbf{Z}_2, n)$, где E — пространство путей в $K(\mathbf{Z}_2, n)$ с фиксированным началом и свободным концом (в частности, стягиваемо), а $K(\mathbf{Z}_2, n-1) = \Omega K(\mathbf{Z}_2, n)$.

Рассмотрим спектральную последовательность этого расслоения. Действие Sq^n на тавтологический элемент группы $H^n(K(\mathbf{Z}_2, n), \mathbf{Z}_2)$ известно: это возведение в квадрат. Нужно узнать действие Sq^{n-1}. Воспользуемся для этого свойством перестановочности с трансгрессией (см. Утверждение 1.) Отображение трансгрессии$(n-1)$-мерных когомологий слоя в n-мерные когомологии базы является изоморфизмом и переводит тавтологический класс в тавтологический. Но действие Sq^{n-1} на $(n-1)$-мерных когомологиях слоя известно: это опять–таки возведение в квадрат. В силу утверждения 1, результат этого возведения трансгрессивен, а его образ при трансгрессии в группе

$E_{2n-1}^{2n-1,0} = E_2^{2n-1,0} \simeq H^{2n-1}(K(\mathbf{Z}_2, n), \mathbf{Z}_2)$ совпадает с искомым образом тавтологического элемента группы $H^n(K(\mathbf{Z}_2, n), \mathbf{Z}_2)$ при операции Sq^{n-1}. Аналогично, действие Sq^{n-2} на $H^n(K(\mathbf{Z}, n), \mathbf{Z}_2)$ сводится к возведению в квадрат в группе $H^{n-2}(K(\mathbf{Z}, n-2), \mathbf{Z}_2)$, и т.д.

Свойства стинродовых квадратов

Справедлива следующая формула Картана для действия этих квадратов на когомологические произведения элементов a, b кольца $H^*(\cdot, \mathbf{Z}_2)$:

$$Sq^i(ab) = Sq^i(a)b + Sq^{i-1}(a)Sq^1(b) + Sq^{i-2}(a)Sq^2(b) + \cdots + aSq^i(b).$$

Это уже довольно сложный результат.

Структурная теорема. Алгебра стабильных $(\mathbf{Z}_2, \mathbf{Z}_2)$-операций *мультипликативно* порождена операциями Стинрода.

(Мы рассматриваем все стабильные когомологические операции. Такие операции можно умножать (т.е. брать их композиции), поэтому они образуют (некоммутативную) алгебру над $\mathbf{Z}_2$.

Операции вида $Sq^s Sq^t Sq^r \cdots$ порождают эту алгебру, но между ними есть соотношения, называемые соотношениями Адема:

$$Sq^s Sq^t = \sum_{r \geq 0} \binom{s-2r}{t-r-1} Sq^{s+t-r} Sq^r, \text{ если } s < 2t.$$

Этим алгебра стабильных когомологических операций уже определяется полностью, т.е. все соотношения, которые там выполняются, вытекают из соотношений Адема.

Следовательно, в качестве аддитивного базиса можно взять так называемые допустимые последовательности $Sq^{a_1} Sq^{a_2} Sq^{a_3} \cdots$, где $a_1 \geq 2a_2$, $a_2 \geq 2a_3$, $a_3 \geq 2a_4, \ldots$ Действительно, если $a_i < 2a_{i+1}$, то с помощью соотношений Адема можно заменить эту последовательность на сумму других, в которых участок $(a_i a_{i+1})$ изменен на допустимые подпоследовательности.

Рассмотрим теперь некоторые приложения операций Стинрода.

Инвариант Хопфа

Инвариант Хопфа умеет различать элементы группы $\pi_{2n-1}(S^n)$, т.е. каждому отображению $S^{2n-1} \to S^n$ сопоставляется инвариант Хопфа. Его можно определить многими эквивалентными способами, вот два из них.

Можно считать, что сфероид $S^{2n-1} \to S^n$ — гладкое отображение. По лемме Сарда выбираем два некритических значения. Затем берем их полные прообразы (это будут гладкие многообразия, снабженные стандартными ориентациями) и вычисляем их индекс зацепления. Это и есть первое определение инварианта Хопфа. Для $n = 2$ инвариант Хопфа принимает все целые значения.

Дадим теперь другое определение инварианта Хопфа. Рассмотрим шар D^{2n} и приклеим его к S^n по отображению его границы $S^{2n-1} \to S^n$, заданному нашим сфероидом. У полученного пространства есть когомологии только в размерностях $0, n, 2n$, причем все три группы когомологий с целыми коэффициентами изоморфны $\mathbf{Z}$. Поэтому квадрат образующей n-мерных когомологий пропорционален образующей $2n$-мерных когомологий. Коэффициент пропорциональности и есть инвариант Хопфа.

Задача 1 *Доказать, что эти два определения инварианта Хопфа совпадают.*

Теорема 3 *Если $n \neq 2^k$, то не существует отображений с нечетным инвариантом Хопфа.*

Действительно, рассмотрим инвариант Хопфа по модулю 2. Нечетность целочисленного инварианта Хопфа означала бы, что возведение в степень — изоморфизм n-мерных и $2n$-мерных когомологий с коэффициентами в $\mathbf{Z}_2$. Из соотношений Адема следует, что если $n \neq 2^k$, то Sq^n разлагается в сумму композиций когомологических операций Sq^i с $i < n$, а все такие операции на n-мерных когомологиях нашего пространства $S^n \cup D^{2n}$ тождественно равны нулю.

Вернемся теперь к характеристическим классам Штифеля–Уитни. Пусть E — пространство n-мерного векторного расслоения над базой B

$$E_0 = E \setminus \{\text{нулевое сечение}\}.$$

(Иногда, определяя E_0, бывает удобнее исключить не нулевое сечение, а объединение единичных шаров в слоях; пара $(E, (E_0)$ получается гомотопически та же самая.) Рассмотрим группу $H^*(E, E_0, \mathbf{Z}_2)$.

Имеется изоморфизм Тома:

$$t : H^i(B, \mathbf{Z}_2) \xrightarrow{\sim} H^{i+n}(E, E_0, \mathbf{Z}_2)$$

В $H^0(B, \mathbf{Z}_2)$ есть фундаментальный коцикл O, который на любой точке принимает значение 0. При изоморфизме Тома ему соответствует класс, который на наборе симплексов, границы которых лежат в E_0, принимает значение, равное числу пересечений (взятому с учетом кратностей) этих симплексов в нулевым сечением (по модулю 2). Это будет некоторый класс $t(O)$ в $H^n(E, E_0, \mathbf{Z}_2)$. К нему можно применить операции Стинрода:

$$Sq^k(t(O)) \in H^{n+k}(E/E_0).$$

Снова применим изоморфизм Тома. В результате попадем в $H^k(B)$.

Теорема 4 (формула Тома для классов Штифеля–Уитни) . *Полученный элемент $t^{-1}Sq^k t(O)$ равен классу Штифеля–Уитни w_k расслоения E.*

Следующая формула, которая позволяет явно выражать классы Штифеля–Уитни касательного расслоения к многообразию в терминах самого многообразия. Пусть M — n-мерное гладкое компактное многообразие без края (возможно неориентируемое). Классы Штифеля–Уитни касательного расслоения называют классами Штифеля–Уитни многообразия.

Определим сначала класс Ву (или класс У). Пусть $k \leq n$. Рассмотрим $H^{n-k}(M, \mathbf{Z}_2)$ и применим Sq^k. В результате попадем в $H^n(M, \mathbf{Z}_2) = \mathbf{Z}_2$. Возникает линейная форма на $H^{n-k}(M, \mathbf{Z}_2)$ со значениями в $\mathbf{Z}_2$.

Но по двойственности Пуанкаре любую линейную форму на $H^{n-k}(M, \mathbf{Z}_2)$ можно реализовать как элемент группы $H^k(M, \mathbf{Z}_2)$. Этот элемент — класс Ву $V_k \in H^k(M, \mathbf{Z}_2)$. Можно рассматривать и полный класс Ву $1 + V_1 + \cdots + V_n \in H^*(M, \mathbf{Z}_2)$.

Для классов Штифеля–Уитни есть довольно полезная формула Ву:

$$w_k(TM) = \sum_{i+j=k} Sq^i(V_j).$$

Класс w_k многообразия можно вычислить и следующим образом. Триангулируем как-нибудь многообразие M и рассмотрим объединение всех $(n-k)$-мерных граней. Если мы попробуем определить для этой цепи класс, двойственный по Пуанкаре, то вообще говоря ничего не получится, потому что эта цепь не обязательно будет циклом. Но если мы возьмем барицентрическое подразделение этой триангуляции, то тогда объединение всех $(n-k)$-мерных граней уже будет циклом, и можно определить класс, двойственный по Пуанкаре.

Теорема (Уитни) утверждает, что этот класс совпадает с w_k.