В. А. Васильев

Топология

Специальный курс, весенний семестр 1998 г.

1 Лекция 4

1.1 Грассманианы и тавтологические расслоения

На прошлой лекции мы говорили о векторных расслоениях и о характеристических классах Штифеля — Уитни.

Среди всех векторных расслоений фиксированной размерности k есть самое важное — *универсальное* или *тавтологическое* расслоение. Характеристические классы естественно возникают при изучении его базы.

Напомню, что грассманово многообразие $G_k(\mathbf{R}^N)$ — это множество k-мерных подпространств в $\mathbf{R}^N$. Оно является гладким многообразием размерности $k(N-k)$. Вложения $\mathbf{R}^N \subset \mathbf{R}^{N+1} \subset \ldots \subset \mathbf{R}^\infty$ задают вложения соответствующих грассманианов

$$G_k(\mathbf{R}^N) \subset G_k(\mathbf{R}^{N+1}) \subset \cdots \ . \tag{1}$$

Бесконечномерное многообразие Грассмана $G_k(\mathbf{R}^\infty)$ — это объединение грассманианов $G_k(\mathbf{R}^N)$, $N \to \infty$, снабженное топологией прямого предела. На многообразии $G_k(\mathbf{R}^N)$ имеется стандартная клеточная структура: две его точки принадлежат одной и той же *клетке Шуберта,* если соответствующие k-мерные плоскости имеют одинаковые размерности пересечений со всеми подпространствами $\mathbf{R}^1 \subset \mathbf{R}^2 \subset \cdots$ нашей последовательности вложенных подпространств, см. § 11 в прошлом курсе. Эти клетки задают клеточное разбиение пространств $G_k(\mathbf{R}^N)$ для всех $N \geq k$ сразу, и на $G_k(\mathbf{R}^\infty)$ тоже возникает структура клеточного пространства.

Над многообразием $G_k(\mathbf{R}^N)$ имеется *тавтологическое* k-мерное векторное расслоение. А именно, пространство расслоения состоит из таких пар $\{x, a\} \in \mathbf{R}^N \times G_k(\mathbf{R}^N)$, что $x \in a$ (здесь a — подпространство в $\mathbf{R}^N$ размерности k, а x — точка в $\mathbf{R}^N$). Расслоение — проекция на второе слагаемое.

Вложения грассманианов (1) поднимаются до вложений пространств тавтологических расслоений над ними; объединение их определяет стабильное тавтологическое расслоение над $G_k(\mathbf{R}^\infty)$.

Теорема 1 *Кольцо $H^*(G_k(\mathbf{R}^\infty), \mathbf{Z}_2)$ изоморфно кольцу $\mathbf{Z}_2[w_1, \ldots, w_k]$ полиномов от некоторых классов w_i, $i = 0, 1, \ldots, k$, называемых* универсальными классами Штифеля — Уитни.

Их можно рассматривать также как классы Штифеля–Уитни тавтологического расслоения над $G_k(\mathbf{R}^\infty)$.

Это кольцо когомологий важно потому, что все остальные k-мерные векторные расслоения сводятся к тавтологическому расслоению над $G_k(\mathbf{R}^\infty)$.

Теорема 2 *а) Любое k-мерное векторное расслоение над компактной базой B эквивалентно расслоению, индуцированному из тавтологического расслоению над $G_k(\mathbf{R}^N)$ с достаточно большим N при некотором отображении $B \to G_k(\mathbf{R}^N)$.*

а') Любое k-мерное векторное расслоение над клеточной базой B эквивалентно расслоению, индуцированному из тавтологического расслоения над $G_k(\mathbf{R}^\infty)$ при некотором отображении $B \to G_k(\mathbf{R}^\infty)$.

б) Если два k-мерных векторных расслоения над одной компактной базой эквивалентны, то соответствующие им отображения базы в $G_k(\mathbf{R}^N)$ гомотопны в некотором грассманиане $G_k(\mathbf{R}^L)$, где $L \geq N$. (Введение $G_k(\mathbf{R}^\infty)$ позволяет не говорить каждый раз о пространстве большей размерности.)

б') Если два k-мерных векторных расслоения над одной клеточной базой эквивалентны, то соответствующие им отображения базы в $G_k(\mathbf{R}^\infty)$ гомотопны.

Таким образом, k-мерные векторные расслоения над B, рассматриваемые с точностью до эквивалентности, находятся во взаимно однозначном соответствии с классами непрерывных отображений B в $G_k(\mathbf{R}^\infty)$, рассматриваемых с точностью до гомотопической эквивалентности. Иными словами, множество k-мерных векторных расслоений над B (рассматриваемых с точностью до эквивалентности) находится во взаимно однозначном соответствии с множеством $[B, G_k(\mathbf{R}^\infty)]$ гомотопических классов отображений в $G_k(\mathbf{R}^\infty)$.

Набросок доказательства. Вся содержательная часть этого утверждения относится к конечномерному случаю. Дальше просто делается переход к пределу.

Нам нужно сконструировать послойное отображение нашего расслоения $p : E \to B$ в тавтологическое расслоение над $G_k(\mathbf{R}^\infty)$, т.е. включить их в коммутативную диаграмму отображений

$$\begin{array}{ccc} E & \to & \mathbf{R}^N \times G_k(\mathbf{R}^N) \\ \downarrow p & & \downarrow \\ B & \stackrel{\phi}{\to} & G_k(\mathbf{R}^N) \end{array} \qquad (2)$$

такую что для любого $b \in B$ слой $p^{-1}(b)$ изоморфно отображается на k-мерную плоскость в $\mathbf{R}^N$, соответствующую точке $\phi(b) \in G_k(\mathbf{R}^\infty)$.

Если база B компактна, то у нее есть покрытие m окрестностями, над каждой из которых расслоение тривиально. Тогда можно взять $N = m \times k$. Действительно, рассмотрим в $\mathbf{R}^N$ набор координат

$$x_1^1, \dots, x_1^k, x_2^1, \dots, x_2^k, \dots\dots, x_m^1, \dots, x_m^k.$$

Для первой окрестности $U_1 \subset B$ возьмем ее полный прообраз $p^{-1}(U_1) \simeq \mathbf{R}^k \times U_1$ и зададим его отображение $\lambda_1 : p^{-1}(U_1) \to \mathbf{R}^N$, отождествляя каждый экземпляр слоя $\mathbf{R}^k$ с координатной плоскостью, натянутой на первые k координат; вне окрестности отображение тождественно равно нулю. Для прообраза второй окрестности рассматриваем отображение λ_2 на координатную плоскость, натянутую на вторые k координат, и т.д. Затем с помощью разбиения единицы на B (которое можно, конечно, поднять на E) из этих разрывных отображений получаем непрерывное отображение $E \to \mathbf{R}^\infty$. Для каждого слоя расслоения p хотя бы одна из функций, входящих в определение разбиения единицы, ненулевая, поэтому каждый слой изоморфно отображается на некоторое k-мерное подпространство.

Докажем теперь обратное утверждение. Если есть два послойных изоморфизма и если размерность пространства $\mathbf{R}^N$ достаточно велика, то ничто не мешает прогомотопировать друг в друга соответствующие отображения $E \to \mathbf{R}^N$ в пространстве отображений, ограничения которых на любой слой являются линейными. Действительно, для любой точки $b \in B$ пространство линейных отображений $p^{-1}(b) \to \mathbf{R}^N$ стягиваемо.

В процессе гомотопирования можно наткнуться на дискриминант, то есть множество таких отображений, что хотя бы для одного $b \in B$ отображение соответствующего слоя в $\mathbf{R}^N$ имеет ранг, меньший k.

Но коразмерность множества вырожденных отображений $\mathbf{R}^k \to \mathbf{R}^N$ в пространстве всех линейных отображений равна $N - k + 1$. Поэтому если $N >> k + \dim B$, то по теореме трансверсальности гомотопия общего положения не задевает дискриминант, и наша гомотопия между отображениями $E \to \mathbf{R}^N$

продолжается до гомотопии между соответствующими послойными отображениями (2). Это — доказательство для компактной базы.

Расслоению $E \to B$ соответствует набор классов когомологий $w_1(E), \ldots, w_k(E) \in H^*(B, \mathbf{Z}_2)$, а именно, — образы $w_1, \ldots, x_k$ при индуцированном отображении $H^*(G_k(\mathbf{R}^\infty), \mathbf{Z}_2) \to H^*(B, \mathbf{Z}_2)$. Гомотопные отображения баз определяют одинаковые отображения когомологий, следовательно эти классы определены однозначно.

На прошлой лекции шла речь о свойствах классов Штифеля — Уитни. Естественность следует из того, что операция индуцирования классов когомологий функториальна.

Формула Уитни не столь тавтологична. Это — нетривиальный факт про гомологии пространства Грассмана. Имеется важное вложение

$$G_k(\mathbf{R}^\infty) \times G_m(\mathbf{R}^\infty) \to G_{k+m}(\mathbf{R}^\infty). \tag{3}$$

Определим его для конечномерных грассмановых пространств. Если $V^k \subset \mathbf{R}^N$ и $V^m \subset \mathbf{R}^N$, то $V^k \oplus V^m$ — подпространство в $\mathbf{R}^{2N}$. Таким образом получаются вложения $G_k(\mathbf{R}^N) \times G_m(\mathbf{R}^N) \to G_{k+m}(\mathbf{R}^{2N})$. Вложение (3) получается из них предельным переходом.

При прямом произведении когомологии тензорно перемножаются. Поэтому возникает индуцированное отображение

$$\mathbf{Z}_2[w_1', \ldots, w_k'] \otimes \mathbf{Z}_2[w_1'', \ldots, w_m''] \leftarrow \mathbf{Z}_2[w_1, \ldots, w_{m+k}],$$

где w_i' порождают когомологии $G_k(\mathbf{R}^\infty)$, а w_i'' когомологии $G_m(\mathbf{R}^\infty)$. Это отображение кольцевое. Поэтому достаточно описать его на мультипликативных образующих. Формула Уитни заключается в том, что они отображаются так:

$$w_i \mapsto w_i' + w_{i-1}' w_1'' + \cdots + w_i' w_{i-1}'' + w_i''.$$

Есть еще категория ориентированных векторных расслоений. Можно рассмотреть множество ориентированных k-мерных подпространств в $\mathbf{R}^N$. Его обозначают $G_k^+(\mathbf{R}^N)$.

Теорема 3 $H^*(G_n^+(\mathbf{R}^\infty), \mathbf{Z}_2) = \mathbf{Z}_2[w_2, \ldots, w_n]$.

Для ориентированных расслоений первый класс Штифеля — Уитни пропадает.

Для накрытия $G_k^+ \to G_k$ индуцированное отображение имеет ядро, натянутое на w_1, а остальные образующие отображаются друг на друга.

Главные (универсальные) расслоения топологических групп

Описанная выше теория векторных расслоений является частным (хотя и очень важным) примером следующей общей теории.

Пусть G — топологическая группа, т.е. топологическое пространство с групповой структурой, такое что отображение умножения $G \times G \to G$ непрерывно и отображение $g \mapsto g^{-1}$ тоже непрерывно. Рассмотрим действие G на E, это — непрерывное отображение $G \times E \to E$. Предположим, что это действие свободное, т.е. $\forall g \in G$, $\forall e \in E$ равенство $g(e) = e$ эквивалентно тому, что $g = 1$. Тогда все орбиты гомеоморфны G. Если пространство орбит B не паталогично, например обладает структурой клеточного пространства, то возникает локально тривиальное расслоение $E \xrightarrow{G} B$. Такое расслоение называют *главным расслоением со структурной группой* G.

Такие расслоения обычно возникают как расслоения групп преобразований, ассоциированные с обычными (неглавными) локально тривиальными расслоениями.

Пусть есть какое-то расслоение $E \xrightarrow{\Phi} B$. Допустим, что на всех слоях Φ действует какая-то группа преобразований. Например, для произвольного слоя всегда можно рассмотреть группу его гомеоморфизмов. (В частности, для k-листного накрытия так получим группу $S(k)$ подстановок элементов слоя.) Если во всех слоях есть структура k-мерного линейного пространства, то возникает группа $GL(\mathbf{R}^k)$ линейных преобразований, а если есть евклидова структура, то возникает группа $O(k)$. Если же есть не только евклидова структура, но и ориентация, то возникает группа $SO(k)$.

Если в слое есть какая-то структура, то можно построить ассоциированное главное расслоение: его слой — это группа преобразований слоя старого расслоения. Например, пусть задано векторное расслоение (или векторное расслоение с евклидовой структурой). Тогда сразу возникает ассоциированное расслоение со структурной группой $G = GL(k, \mathbf{R})$ (или $O(k, \mathbf{R})$): берем множество всех (ортогональных) реперов в слое, т.е. рассматриваем множество, состоящее из пар вида $\{$точка b базы, репер в слое исходного расслоения над точкой $b\}$. Это — главное G-расслоение. Категория k-мерных векторных расслоений эквивалентна категории главных $GL(k, \mathbf{R})$-расслоений над той же базой.

С k-листным накрытием аналогичным образом ассоциируется $k!$-листное $S(k)$-накрытие: слой его состоит из всевозможных упорядочений точек слоя старого накрытия.

Если фиксирована группа G и мы рассматриваем все главные G-расслоения над разными базами, то возникает категория: возможно индуцирование расслоений при отображении баз. В классе G-расслоений с клеточной базой существует выделенный элемент — *универсальное расслоение.*

Теорема 4 *а) Для любой топологической группы G, являющейся CW-комплексом, существует единственное (с точностью до гомотопической эквивалентности) главное G-расслоение $E \xrightarrow{G} B$, тотальное пространство E которого стягиваемо и оба пространства B и E имеют гомотопический тип клеточных комплексов. (Универсальное расслоение.)*

б) Для любого другого главного G-расслоения $E' \xrightarrow{G} B'$ с клеточной базой B' существует единственное (с точностью до гомотопии) отображение $B' \to B$, индуцирующее рассматриваемое расслоение из универсального расслоения.

Основной пример. Пусть $G = O(\mathbf{R}^k)$. Тогда соответствующим универсальным главным расслоением является расслоение ортогональных k-реперов в слоях тавтологического расслоения над $G_k(\mathbf{R}^\infty)$.

Для $G = SO(\mathbf{R}^k)$ берем ортонормированные k-реперы над $G_k^+(\mathbf{R}^\infty)$ (ориентация репера совпадает с ориентацией подпространства).

Главное расслоение со стягиваемым тотальным пространством строится с помощью операции $*$ (джойн). Если G — топологическая группа, являющаяся клеточным комплексом, то на $G * G$ можно определить естественное действие G. А именно, если $g : a \mapsto ga$ и $g : b \mapsto gb$, то g переводит отрезок $[a, b]$, участвующий в построении джойна, в отрезок $[ga, gb]$. Рассмотрим бесконечную последовательность

$$G \subset G * G \subset (G * G) * G \subset \ldots$$

Действие группы G определено на каждом члене. Операция $*$ загоняет сложную топологию во всё более высокие размерности. В конце получаем клеточное пространство без гомотопических групп. Оно стягиваемо, и утверждение а) теоремы доказано.

Эта реализация универсального расслоения была предложена Милнором.

Часть (б) теоремы 4 доказывается с помощью теории препятствий.

Базу B универсального G-расслоения называют *классифицирующим пространством для группы G* и обозначают BG. Например, $G_k(\mathbf{R}^\infty) \cong BO(\mathbf{R}^k)$ и $G_k^+(\mathbf{R}^\infty) \cong BSO(\mathbf{R}^k)$.

Задача 1 *Пусть G — дискретная группа. Как устроено классифицирующее пространство BG?*