В. А. Васильев

Топология

Специальный курс, весенний семестр 1998 г.

1 Лекция 10

Простейшая задача, связанная с вычислением корней многочленов, это решение уравнения $z^2 = a$, $|a| \le 1$. Докажем, что в этом случае алгоритм должен иметь по крайней мере одно ветвление, т.е. по крайней мере 2 выхода. (Предполагается, что точность ε меньше 1.)

Алгоритм без ветвлений — непрерывная функция, которая сопоставляет числу a одно из двух чисел $\sqrt{a}$ с точностью до ε. Возьмем $a = 1$. Этой точке сопоставляется точка из ε-окрестности точки 1 (или -1). Начнем двигаться по единичной окружности. В каждый момент алгоритм будет выдавать на выход точку из ε-окрестности данной ветви корня. После полного оборота получим точку из ε-окрестности точки -1 (или 1). Непрерывная функция не может в одной и той же точке 1 одновременно принимать значения из ε-окрестностей точек 1 и -1.

Это рассуждение основано на том, что двулистное накрытие окружности не имеет непрерывных сечений.

Рассмотрим теперь всевозможные алгоритмы, выдающие все (приближенные) корни уравнения

$$z^d + a_1 z^{d-1} + \dots + a_{d-1} z + a_d = 0, \quad |a_i| \le 1. \tag{1}$$

Пусть A — множество всех таких полиномов. Рассмотрим множество $A \setminus \Sigma$, где Σ — дискриминант (множество многочленов с кратными корнями). У многочленов из $A \setminus \Sigma$ все корни разные, поэтому можно рассмотреть $d!$-листное накрытие

$$f_d : M^d \to (A \setminus \Sigma),$$

при котором упорядоченному набору различных точек сопоставляется полином с корнями в этих точках. Слой накрытия состоит их всех упорядочений набора корней.

Теорема 1 (Смейл) *При достаточно малом ε топологическая сложность задачи вычисления всех корней с точностью ε не меньше $g(f_d) - 1$.*

Доказательство состоит в раскрытии определений, но с двумя хитростями.

1) Рассмотрим Σ_ε — множество полиномов, имеющих пару корней, расстояние между которыми не превосходит 2ε. Тогда пространства $A \setminus \Sigma_\varepsilon$ и $A \setminus \Sigma$ гомотопически эквивалентны (при достаточно малом ε). Соответственно, ограничение накрытия f_d на $A \setminus \Sigma_\varepsilon$ является накрытием, гомотопически эквивалентным f_d. В частности, их роды одинаковы.

2) Пусть существует алгоритм сложности T, т.е. алгоритм с $T+1$ выходным узлом. Тогда множества, участвующие в определении рода, предъявляются по этому алгоритму. Каждому выходу сопоставляем подмножество в базе нашего накрытия, состоящее их таких входных данных, что, пройдя по алгоритму, мы попадаем именно на этот выход. Сечение накрытия f_d над каждым таким множеством по существу задается алгоритмом (который любой точке базы сопоставляет упорядоченный набор чисел, то есть точку пространства накрытия). Это сопоставление непрерывно. Правда, оно не является точным сечением, отображая точку базы не в точку слоя над ней, а всего лишь в некоторую точку в ее ε-окрестности. Однако в силу определения множества Σ_ε никакой набор d точек не может лежать в ε-окрестности сразу двух точек слоя над одной и той же точкой базы, поэтому наше ε-сечение однозначно деформируется в точное сечение. Еще одна неприятность состоит в том, что множества базы, соответствующие разным выходам, вообще говоря не открытые и поэтому наша система подмножеств и сечений не вполне укладывается в определение рода. Однако эти множества полуалгебраические, и легко проверить, что если есть искомая система сечений над ними, то их можно продолжить и до сечений над достаточно малыми открытыми окрестностями этих множеств.

Теорема 2 *а) Для любого числа d и для любого простого числа p выполняется неравенство $g(f_d) \geq d - N(d,p)$, где $N(d,p)$ — минимальное число степеней p, в сумму которых разлагается число d.*

б) Топологическая сложность алгоритма вычисления всех корней уравнения (1) с точностью ε не превосходит $d-1$ при любом фиксированном ε.

Часть б) доказывается непосредственно: соответствующий алгоритм предъявляется почти явно, с точностью лишь до теоремы Вейерштрасса о приближении непрерывных функций.

Верхняя оценка а) доказывается с помощью когомологий групп кос. Легко проверить, что пространство $A \setminus \Sigma$ гомотопически эквивалентно $B(\mathbf{C}, d)$. Если бы не было ограничения $|a_i| \leq 1$, то эти пространства просто совпадали бы по определению. Но $\mathbf{C}$ ретрагируется на единичный круг.

Накрытие f_d — главное накрытие с группой S_d. Это позволяет применить Способ 3 из предыдущей лекции. Получаем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} M^d & \to & F(\mathbf{R}^\infty, d) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (A \setminus \Sigma) & \to & K(S(d), 1) \\ \| & & \| \\ B(\mathbf{C}^1, d) & \subset & B(\mathbf{R}^\infty, d) \end{array}$$

Нужно подобрать группу коэффициентов, чтобы отображение когомологий было как можно дольше ненулевым.

Рассмотрим, например, группу $\mathbf{Z}_2$. Когомологии пространства $B(\mathbf{C}^1, d)$ с такими коэффициентами было вычислено Фуксом, он же доказал, что отображение $\mathbf{Z}_2$-когомологий, заданное классифицирующим отображением его в $K(S(d), 1) \simeq B(\mathbf{R}^\infty, d)$, эпиморфно. Поэтому об этом отображении думать не надо, а важна лишь старшая размерность i такая, что группа $H^i(B(\mathbf{C}^1, d), \mathbf{Z}_2)$ нетривиальна. Эта размерность равна $d - k(d)$, где k — число Масси (равное, в наших теперешних обозначениях, $N(d, 2)$).

Однако немного лучшую оценку удается получить, если рассмотреть не группу $\mathbf{Z}_2$, а некую локальную систему коэффициентов $\pm\mathbf{Z}$ со слоем $\mathbf{Z}$. Она определяется следующим образом. Обход по пути в любом конфигурационном пространстве $B(X, d)$ дает перестановку d точек; если эта перестановка нечетна, то сопоставляем пути умножение на -1. Для такой локальной системы удается довести оценку до того, что формулируется в теореме. Все когомологии снова приходят из симметрической группы.

Для алгоритма, вычисляющего один корень, можно сделать то же самое, но вместо $d!$-листного накрытия рассмотреть d-листное накрытие

$$\{\text{полином и один корень}\} \to \{\text{полином}\}.$$

Обозначим это накрытие $\varphi_d : W^d \to A \setminus \Sigma_\varepsilon$.

Теорема 3 *Если d — степень простого числа, то $g(\varphi_d) = d$ (а следовательно топологическая сложность задачи вычисления одного корня уравнения (1) равна $d - 1$).*

При доказательстве используется другая техника, потому что это накрытие не главное. Но можно воспользоваться теоремой про ассоциированные расслоения.

Рассмотрим расслоение $(\varphi_d)^{*(d-1)}$, слой которого над точкой базы — это джойн $d-1$ слоев накрытия φ_d. Нужно проверить, есть ли у этого расслоения глобальное сечение. (Конечно, наша цель состоит в том, чтобы доказать, что таких сечений нет.) Для этого нужно вычислить первое когомологическое препятствие.

Слой F накрытия φ_d состоит из d точек. По-другому его можно представить как букет $d-1$ нульмерных сфер S^0. Джойн $d-1$ слоев — это букет сфер S^{d-2} в количестве $(d-1)^{(d-1)}$. Первое когомологическое препятствие к существованию расслоения лежит в группе

$$H^{d-1}(A\setminus\Sigma,\{\pi_{d-2}(F)\})\simeq H^{d-1}(A\setminus\Sigma,\{H_{d-2}(F)\})\simeq H^{d-1}(A\setminus\Sigma,\{(\tilde H_0(\Phi))^{\otimes(d-1)}\}),$$

где Φ — слой исходного накрытия, а $\tilde H_*$ — гомологии, приведенные по модулю точки. Явное вычисление этого препятствия дает утверждение теоремы.

1.1 Классы Чженя и Понтрягина

Классы Штифеля–Уитни определялись как классы когомологий классифицирующего пространства $B(O(n))$, в качестве которого можно взять бесконечный грассманиан $G_n(\mathbf{R}^\infty)$. Такую же конструкцию можно применить для построения классов Чженя и Понтрягина.

Рассмотрим комплексное расслоение $E\to B$ со слоем $\mathbf{C}^n$. Ему соответствует ассоциированное главное расслоение с группой $GL(n,\mathbf{C})\sim U(n)$. Исходное векторное расслоения индуцируется отображением $B\to BU(n)=G_n(\mathbf{C}^\infty)$, где $G_n(\mathbf{C}^\infty)$ — комплексный грассманиан. При этом

$$H^*(G_n(\mathbf{C}^\infty),\mathbf{Z})\cong\mathbf{Z}[c_1,c_2,\dots,c_n];$$

размерность c_i равна $2i$.

Классы c_i — *универсальные классы Чженя.* Отображение $B\to BU(n)$, соответствующее нашему расслоению, индуцирует из них на B *классы Чженя расслоения* $E\to B$. Для этих классов тоже есть формула Уитни:

$$c(E\oplus E')=c(E)c(E'),$$

где $c(E)=1+c_1+\dots+c_n$.

Для комплексных расслоений тоже можно определить стабильную эквивалентность и K-функтор.

Пусть теперь есть вещественное расслоение. Мы хотим получить характеристические классы не с коэффициентами в $\mathbf{Z}_2$, а с коэффициентами в $\mathbf{Z}$. Можно, например, считать когомологии грассанианов с коэффициентами в $\mathbf{Z}$. Но группа $H^*(G_n(\mathbf{R}^\infty), \mathbf{Z})$ имеет много слагаемых $\mathbf{Z}_2$. Перейдем к $\mathbf{Z}[1/2]$ или $\mathbf{Q}$ (чтобы была делимость на 2) и рассмотрим группу $H^*(G_n(\mathbf{R}^\infty), \mathbf{Q})$.

Но возможен и другой подход. Для вещественного расслоения можно рассмотреть его комплексификацию, т.е. комплексное расслоение над той же базой, слой которого равен $\xi \otimes \mathbf{C}$, где ξ — слой исходного вещественного расслоения над той же точкой базы. У комплексификации есть классы Чженя. Они однозначно определяются по исходному вещественному расслоению и тоже могут рассматриваться как его характеристические классы. Несложно показать, что все нечетные классы Чженя $c_1, c_3, \cdots$ при этом дают в лучшем случае элементы порядка 2 (то есть удовлетворяют соотношению $c_i + c_i = 0$). Это следует из того, что, с одной стороны, комплексификация вещественного расслоения всегда изоморфна своему комплексно сопряженному расслоению, а с другой для полных классов Чженя комплексно сопряженных комплексных векторных расслоений $\nu, \bar{\nu}$ имеется соотношение

$$c(\bar{\nu}) = 1 - c_1(\nu) + c_2(\nu) - c_3(\nu) + \cdots + (-1)^n c_n(\nu).$$

Поэтому основной интерес представляют характеристические классы, приходящие из четных классов Чженя комплексификации. Они называются классами Понтрягина вещественного расслоения: $p_i(\xi) \equiv c_{2i}(\xi \otimes \mathbf{C})$, $i = 0, 1, \cdots, [\dim \xi/2]$. Классы Понтрягина тавтологических расслоений над грассмановыми многообразиями называются универсальными классами Понтрягина и обозначаются просто p_i.

Оказывается, что эти два подхода дают один и тот же результат. А именно, верно следующее. Задача состоит в вычислении когомологий стабильного грассманиана. Отдельно рассматриваем ориентируемые и неориентируемые грассманианы. Для ориентируемых грассманианов

$$H^*(G^+_{2n+1}(\mathbf{R}^\infty), \mathbf{Q}) = \mathbf{Q}[p_1, \ldots, p_n],$$

$$H^*(G^+_{2n}(\mathbf{R}^\infty), \mathbf{Q}) = \mathbf{Q}[p_1, \ldots, p_n, e].$$

Здесь $p_i \in H^{4i}()$, e — эйлеров класс.

Для неориентируемых грассманианов

$$H^*(G_m(\mathbf{R}^\infty), \mathbf{Q}) = \mathbf{Q}[p_1, \ldots, p_{[m/2]}].$$

У неориентируемого расслоения эйлеров класс нулевой. Все классы Понтрягина стабильны, то есть не изменяются при прямом сложении расслоения с тривиальным расслоением любой размерности.

Эйлеров класс нестабилен.

Числа Штифеля–Уитни различают класс неориентированного кобордизма. Возьмем теперь отношение ориентированного кобордизма, т.е. *ориентированное* многообразие M^n кобордантно нулю, если найдется ориентированное многообразие W^{n+1} такое что $\partial W^{n+1} = M^n$ с совпадением ориентаций. Если хотя бы одно из (аналогичным образом определяемых) чисел Понтрягина многообразия M^n отлично от нуля, то M^n не кобордантно нулю. Если же все числа Понтрягина равны нулю (например, это всегда выполняется в случае, когда размерность многообразия M^n не делится на 4), то объединение нескольких экземпляров многообразия M^n кобордантно нулю.

Можно определить градуированную группу (и даже кольцо) Ω_* ориентированного кобордизма: его n-мерная однородная составляющая определяется как абелева группа, свободно порожденная всевозможными компактными n-мерными ориентированными многообразиями без края, и затем профакторизованная по подгруппе, порожденной всеми многообразиями, кобордантными 0. Из предыдущего утверждения следует, что при n не кратных 4 группа Ω_n конечна, а при $n = 4k$ ранг этой группы не больше, чем число $p(k)$ неэквивалентных n-мерных чисел Понтрягина, т.е. разбиений числа k в сумму положительных чисел. Оказывается, что эта оценка точна: Том показал, что уже в классе комплексных четномерных алгебраических многообразий для любого k можно набрать $p(k)$ образующих, на которых числа Понтрягина независимы, так что

$$\Omega_* \times \mathbf{Q} \simeq \mathbf{Q}[p_1, p_2, \cdots].$$