Математический Колледж НМУ **Топология, 2 семестр**

Лекция 8

3 апреля 1998 г.

Пусть E, B, F — топологические пространства. Отображение $p : E \to B$ называется *локально тривиальным расслоением* (коротко — расслоением) *со слоем* F, если для каждой точки $b \in B$ найдется окрестность $U \subset B$ и гомеоморфизм $\varphi : p^{-1}(U) \to U \times F$ такой, что диаграмма $\begin{tikzcd} p^{-1}(U) \arrow[dd, "\varphi"'] \arrow[dr] & \\ & U \\ U \times F \arrow[ur] & \end{tikzcd}$ коммутативна. Здесь верхняя стрелка обозначает отображение p, а нижняя — естественную проекцию $\pi : U \times F \to U$. Иными словами, расслоение это отображение, которое *локально* устроено как проекция. Очевидно, прообраз $p^{-1}(b) \subset E$ произвольной точки $b \in B$ гомеоморфен F. Иногда расслоением называют всю четверку (E, B, F, p), тогда E называется расслоенным пространством, B — базой, F — слоем, p — проекцией. Два расслоения $p : E \to B$ и $p' : E' \to B$ с одной и той же называются эквивалентными, если существует гомеоморфизм расслоенных пространств $\varphi : E \to E'$, такой, что диаграмма $\begin{tikzcd} E \arrow[dd, "\varphi"'] \arrow[dr, "p"] & \\ & B \\ E' \arrow[ur, "p'"'] & \end{tikzcd}$ коммутативна.

Примеры расслоений:

1. Тривиальное расслоение: $E = B \times F$, $p = \pi$ (проекция). Расслоение, эквивалентное тривиальному, также называют тривиальным.
2. B — окружность, E — лист Мебиуса, F — отрезок, p — проекция листа Мебиуса на его среднюю линию. Это расслоение нетривиально, поскольку E (лист Мебиуса) не гомеоморфно $B \times F$ (цилиндру).
3. Накрытие это расслоение, слой F которого дискретен.
4. (очень важный пример) Касательное расслоение к n-мерному многообразию M. Предположим, что M вложено в евклидово пространство $\mathbb{R}^N$ (вообще говоря, $N > n$). Рассмотрим множество $E \subset M \times \mathbb{R}^N$, состоящее из пар (x, v), выдененных условием, что вектор v принадлежит линейному подпространству $\mathbb{R}^N$, параллельному касательному подпространству к M в точке x (т.е. берется касательное подпространство и переносится так, чтобы оно проходило через начало координат). Теперь $B = M$, а проекция $p(x, v) \stackrel{\text{def}}{=} x$. Слой F это линейное пространство, размерность которого равна n — размерности многообразия M. Оказывается, что касательное расслоение не зависит, с точностью до эквивалентности, от выбора линейного пространства $\mathbb{R}^N$ и вложения в него многообразия M. Обозначения: $E = TM$, слой TM над точкой $x \in M$ обозначается $T_x M$.
5. Расслоение Хопфа: $E = S^3 = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid |z|^2 + |w|^2 = 1\}$, $B = S^2 = \mathbb{C}P^1$, проекция $p(z, w) = [z : w]$. Нетрудно видеть, что слой F гомеоморфен окружности. Расслоение Хопфа нетривиально, поскольку S^3 не гомеоморфна $S^2 \times S^1$. Обобщенное расслоение Хопфа: $E = S^{2n+1} = \{(z_0, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \mid \sum_{i=0}^n |z_i|^2 = 1\}$, $B = \mathbb{C}P^n$, $p(z_0, \ldots, z_n) = [z_0 : \ldots : z_n]$. Слой также гомеоморфен S^1.

Известно, что над односвязными топологическими пространствами не существует нетривиальных накрытий. Некоторым аналогом этой теоремы является

Теорема 1 (Фельдбау) *Всякое расслоение над n-мерным кубом $K_n = [0, 1]^n$ тривиально.*

Доказательство Разобьем K_n на два подмножества I_1 и I_2, выделенных условиями $x_1 \le 1/2$ и $x_1 \ge 1/2$. Обозначим $E_1 = p^{-1}(I_1)$, $E_2 = p^{-1}(I_2)$. Предположим сначала, что расслоения $p : E_1 \to I_1$ и $p : E_2 \to I_2$ тривиальны, и пусть $\varphi_1 : E_1 \to I_1 \times F$ и $\varphi_2 : E_2 \to I_2 \times F$ — соответствующие тривиализующие гомеоморфизмы. Композиция $\alpha = \varphi_2^{-1} \circ \varphi_1$ является отображением $(I_1 \cap I_2) \times F$ в себя; поскольку φ_1 и φ_2 согласованы с проекцией p (этого требует определение тривиализации), отображение α имеет вид $\alpha(b, v) = (b, f_b(v))$, где $b \in I_1 \cap I_2$ и $v \in F$. Таким образом, для каждого b определен гомеоморфизм f_b слоя F.

Возьмем теперь произвольную точку $x = (x_1, \ldots, x_n) \in I_2$ и обозначим $\pi(x) = (x_1, \ldots, x_{n-1}, 1/2)$ ее проекцию на $I_1 \cap I_2$. Положим $\psi(x, v) = (x, f_{\pi(x)}(v))$, где $x \in I_2$, $v \in F$. Теперь гомеоморфизм $\varphi : E \to K_n \times F$, заданный равенством $\varphi(e) = \begin{cases} \varphi_1(e), & e \in E_1, \\ \varphi \circ \varphi_2(e), & e \in E_2 \end{cases}$, является тривиализацией расслоения E над K_n.

Общий случай без труда сводится к рассмотренному. Для каждой точки $x \in K_n$ существует ее окрестность, над которой расслоение p тривиально. В силу компактности куба его можно разбить на конечное число кубиков $A_1, \ldots, A_N$, над каждым из которых расслоение тривиально. Занумеруем кубики так, чтобы для всякого k существовал гомеоморфизм $\varphi : \bigcup_{i \le k} A_i \to K_n$ такой, что $\varphi(A_k) = I_2$, а $\varphi\left(\bigcup_{i \le k-1} A_i\right) = I_1$. Предполагая по индукции, что над $\bigcup_{i \le k-1} A_i$ расслоение тривиально, получим по уже доказанному, что оно тривиально и над $\bigcup_{i \le k} A_i$. Индукцией по k доходим до $k = N$. Теорема доказана. ■

Пусть теперь $p : E \to B$ — расслоение со слоем F, и $f : B' \to B$ — произвольное непрерывное отображение. Тогда можно рассмотреть *индуцированное расслоение* $f^*p : E' \to B'$ с тем же слоем, конструкция которого такова. E' — подмножество $E \times B$, выделенное условием: $(e, b) \in E' \Leftrightarrow f(b) = p(e)$. Проекция $f^*p(e, b) \stackrel{\text{def}}{=} b$. Нетрудно проверить, что это расслоение. Кроме того, существует отображение $q : E' \to E$, действующее по формуле $q(e, b) = e$ и делающее коммутативной диаграмму
$$\begin{array}{ccc} E' & \xrightarrow{q} & E \\ \downarrow \mathrm{f^*p} & & \downarrow \mathrm{p} \\ B' & \xrightarrow{f} & B \end{array}.$$

Теорема 2 (о накрывающей гомотопии) *Пусть $p : E \to B$ — расслоение, $K_n = [0,1]^n$ — единичный куб, ∂K_n — его граница (гомеоморфная S^{n-1}). Пусть задано непрерывное семейство непрерывных отображений (гомотопия) $f_t : K_n \to B$, отображение $F_0 : K_n \to E$, накрывающее f_0 (т.е. такое, что $p \circ F_0 = f_0$), и гомотопия $G_t : \partial K_n \to E$, накрывающая $f_t|_{\partial K_n}$. Тогда существует гомотопия $F_t : K_n \to E$, накрывающая f_t и такая, что ее ограничение на ∂K_n совпадает с G_t.*

Набросок доказательства Пусть сначала расслоение $p : E \to B$ тривиально. Тогда $E = B \times F$, $F_0(x) = (f_0(x), \lambda_0(x))$, $G_t(x) = (f_t(x), \mu_t(x))$, где $\mu_t(x)$ задана при $x \in \partial K_n$. Требуется найти гомотопию $\lambda_t : K_n \to F$ такую, что $\lambda_t(x) = \mu_t(x)$ при $x \in \partial K_n$ — при том, что начальное отображение этой гомотопии, λ_0, уже задано. Существование такой гомотопии (т.е. возможность продолжить любцю гомотопию с границы куба на весь куб) следует из общетопологической теоремы (леммы Борсука), формулировку и доказательство которой мы не приводим.

Пусть теперь расслоение $p : E \to B$ произвольно. Пусть p' — раслоение над $K_n \times [0,1] = K_{n+1}$, инуцированное из p посредством гомотопии f_t. Это расслоение тривиально по теореме Фельдбау.

Гомотопия G_t теперь задает гомотопию $\tilde{G}_t : K_n \to E'$ по формуле $\tilde{G}_t(x) = (G_t(x), x, t)$ (напомним, что E' является подмножеством $E \times (K_n \times [0,1])$). Осталось применить теорему о накрывающей гомотопии к тривиальному расслоению $p' : E' \to K_n \times [0,1]$, (тождественной) гомотопии $K_n \times [0,1] \to K_n \times [0,1]$ и гомотопии $\tilde{G}_t$. Полученное поднятие $\tilde{F}_t : K_n \to E'$ превращается в поднятие $F_t : K_n \to E$ с помощью отображения q. ■