Математический анализ, 1 курс, весна 1998

С. В. Дужин, С. В. Чмутов

(duzhin@botik.ru, chmutov@botik.ru)

Листовка No. 5 — 24.03.1998

1. (*Лемма Адамара.*) Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ — гладкая функция на $\mathbb{R}^n$, обращающаяся в 0 в точке $(0, \ldots, 0)$. Доказать, что ее можно представить в виде

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i g_i(x_1, \ldots, x_n),$$

где g_i — гладкие функции.

2. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ — гладкая функция на $\mathbb{R}^n$, обращающаяся в 0 в точках a и b. Доказать, что ее можно представить в виде

$$f = \sum_{i=1}^{m} g_i h_i,$$

где g_i, h_i — гладкие функции, причем $g_i(a) = h_i(b) = 0$. Каким наименьшим значением m можно здесь обойтись?

3. К какому простейшему виду приводится функция $f(x, y) = e^x + e^y - e^{x+y}$ локальными диффеоморфизмами в окрестности данной точки и ее значения:

(a) в точке $(0, 0)$?

(b) в точке $(-1, -1)$?

4. Найти диффеоморфизм $X(x, y)$, $Y(x, y)$ окрестности нуля на плоскости, для которого $X^2 - Y^2 = \sin(x^2 - y^2)$ (т.е. приводящий функцию $f(x, y) = \sin(x^2 - y^2)$ к морсовскому каноническому виду).

5. Разложить каждый из следующих диффеоморфизмов в окрестности указанной точки в композицию простейших (т.е. меняющих только одну координату):

(a) $(x, y) \mapsto (x + y^2, y + x^2)$, точка $(0, 0)$.

(b) $(x, y, x) \mapsto (x \cos y \cos z, x \cos y \sin z, x \sin y)$, точка $(1, 0, 0)$.

6. Исследовать функции на условный экстремум методом множителей Лагранжа:

(a) $x^2 + y^2$ при $xy = 1$.

(b) xy при $2x^2 + 8y^2 - x^2y^2 = 0$.

(c) $x + y + z$ при $1/x + 4/y + 9/z = 1$.

(d) $xy + yz$ при $x^2 + y^2 = 2$, $x + z = 2$.

(e) xyz при $x + y + z = 5$, $xy + yz + zx = 8$.

(f) $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$ при $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1$.

7. Найти треугольник данного периметра, который вращением около одной из своих сторон образует тело наибольшего объема.

8. Около прямоугольного параллелепипеда со сторонами $(2a, 2b, 2c)$ описать эллипсоид наименьшего объема.