25 февраля 2023.

Семинар "Диофантовы приближения".

×2 ×3 теорема Фюрстенберга
(продолжение)

$(a,b)=1$

В прошлый раз закончили вот такой леммой 1 $\varepsilon > 0$

$$\alpha = \frac{A}{Q}, \quad (A, Q) = 1$$

$$M < Q, \quad M_1 = MQ$$

$$\Delta \asymp \frac{1}{(\log\log M)^{\frac{1}{\beta-1}-\varepsilon}}$$

поправка к прошл. разд-

Тогда: $\Sigma_\alpha(M_1) - \Sigma_\alpha(M_1) \pmod 1$ Δ-плотно

$$\Sigma_\alpha(M) = \{ \{a^u b^v \alpha\}, \; a^u b^v \le M \}$$

О док-ве леммы 1

$$\eta', \eta'' \in \Sigma_\alpha(M) \quad ; q', q'' \in \Sigma(M)$$

$$\eta' = \{q'\alpha\}, \quad \eta'' = \{q''\alpha\}$$

$$\eta' - \eta'' = \frac{1}{d} \qquad \eta' - \eta'' \in \Sigma_\alpha(M) - \Sigma_\alpha(M)$$

$$q_1 < q_2 < \dots < q_k \le d < q_{k+1}$$

$$q_{i+1} - q_i \le (\log d)^{\frac{1}{\beta-1}}$$

$$q_i(y' - y'') = q_i(\{q'\alpha\} - \{q''\alpha\})$$

эта послед. получаем плотн.

А нам надо плотность

$$\{q_i q'\alpha\} - \{q_i q''\alpha\}$$

На самом деле.

$$q_j(\{q'\alpha\} - \{q''\alpha\}) = \begin{cases} \{q_j q'\alpha\} - \{q_j q''\alpha\} \\ 1 - (\{q_j q'\alpha\} - \{q_j q''\alpha\}) \end{cases}$$

если $\{q_j q'\alpha\} > \{q_j q''\alpha\}$

иначе.

Поэтому прежде тут была глупость:

$\sum_{\xi'} - \sum_{\xi''}$ плотн. в $[0\ 1]$

$(1-\varepsilon, 1]$

$1-\varepsilon < \xi' - \xi'' < 1$

ξ', ξ'' — оба близки к 1

$$\Sigma_\alpha \subset [0\ 1)$$

$$\Sigma_\alpha - \Sigma_\alpha \subset (-1, 1)$$

$\xi \in [0\ 1)$

$-\xi$ Рассм [illegible]

Иными словами, ... сформулирована

$$\left(\Sigma_\alpha(M_1) - \Sigma_a(M_1) \right) \cup \left(1 - \left(\Sigma_\alpha(M_1) - \Sigma_a(M_1)\right)\right)$$

Δ - плотно на $[0,1]$

$a, b \quad (a, b)$ $\quad \Sigma(R) = \{ q = a^u b^v \leq R \}$

Обозначение: $R \in \mathbb{Z}_+$ $\quad N = a^n \quad n$

$$\mathcal{X}_n^R = \{ x \in \mathbb{Z}_+ : 0 \leq x \leq a^n - 1 : \; \exists \, \eta \in \Sigma_\alpha(R) \text{ такое что } \frac{x}{a^n} \leq \eta < \frac{x+1}{a^n} \} =$$

$\Sigma_\alpha(R) = \{\{q\alpha\}, q \leq R\}$

$= \{$ целые из промежутка $[0, N)$ вида $[a^n \eta]$ $\eta \in \Sigma_\alpha(Q) \}$ $\quad \alpha = \frac{A}{Q}$

$$X_n^R = |\mathcal{X}_n^R|.$$

Параметры: $\quad M \asymp Q^{\delta}$

$$R = M_1$$

$$\Delta \asymp_{ab} \frac{1}{(\log \log M)^{\frac{1}{\beta - 1} - \varepsilon}}$$

Над $\quad N \leq \frac{1}{\Delta}$

$\frac{1}{\beta - 1} - \varepsilon$

$a^n = N \asymp (\log\log M)$

$n \sim \log\log\log M$

$$\boxed{\text{Лемма 2} \qquad X_n^{M_1} \geqslant \frac{\sqrt{N}}{2}.}$$

Д 1 $\quad \Sigma_\alpha(M_1) - \Sigma_\alpha(M_1) \cup$

$\cup\,(1 - (\Sigma_\alpha - \Sigma_\alpha))$

Δ - плотно в $[0,1]$

$[a^n y]$

$$\left\{ \begin{array}{c} [a^n y_1] - [a^n y_2] \\ N - ([a^n y_1] - [a^n y_2]) \end{array} \right\}$$

C - плот. $f(0\,x)$

$[a^n y] \quad y \in \Sigma_\alpha$

$\gg \sqrt{N}$

$[a^n y_1] - [a^n y_2]$

$c\sqrt{N}$ $\quad (c\sqrt{N})^2 = c^2N$

Лемма 2 док

$$\mathcal{X}_n^R = \{x \in \mathbb{Z}_+ : 0 \le x \le a^n - 1 :$$
$$\exists y \in \Sigma_a(R) \text{ такое } \ldots$$
$$\frac{x}{a^n} \le y < \frac{x+1}{a^n}\} =$$

Проекции $\mathcal{X}_n^R$

$s \le n$

$$\mathcal{X}_{n,s}^R = \{x \in \mathbb{Z}_+ \ 0 \le x \le a^s - 1$$
$$\exists x^* \in \mathcal{X}_n^R :$$
$$x \equiv x^* \pmod{a^s}\}$$

Лемма 3 $\quad M_2 = M_1 \cdot a^{n-s} \quad x^*+1$

Пусть $x^* \in \mathcal{X}_n^{M_1}$ $\quad \frac{x}{a^n} \le y < \frac{x+1}{a^n}$

$y \in \Sigma_\alpha(M_1)$

Тогда Если $x \in \mathcal{X}_{n,s}^{M_1}$ $\quad x \equiv x^*(a^s)$

то $\exists y_1 \in \Sigma_\alpha(M_2)$ такое что

$$\frac{x}{a^s} \le y_1 < \frac{x+1}{a^s};$$

В частности $\quad |\mathcal{X}_{n,s}^{M_1}| < |\mathcal{X}_s^{M_2}|$

Еще один объект: $\quad 0 \le \lambda < a^{s-\ell}$

$n \ge s \ge \ell$

$$\mathcal{X}_{n,s,\ell}^{M_1}(\lambda) = \{x \in \boxed{\mathcal{X}_{n,s}^{M_1}} : x \equiv \lambda (a^{s-\ell})\},$$

$$\boxed{\mathcal{X}_{n,s}^{M_1} = \bigcup_{\lambda=0}^{a^{s-\ell}-1} \mathcal{X}_{n,s,\ell}^{M_1}(\lambda)} \qquad \mathcal{X}_n^{M_1}$$

Лемма 4 Основная комбинаторная лемма

Пусть $\ell = \bar{o}(n)$

Пусть $X_n^{M_1} \geq c a^{n/2} = c\sqrt{a^n}$, $c > 0$

Тогда $\forall \varepsilon > 0$ $n \geq n_0(c, \varepsilon)$ найдётся s из промежутка

$$\varepsilon n \leq s \leq n$$

$s \underset{\varepsilon}{\asymp} n$

и найдётся λ из промежутка

$$0 \leq \lambda < a^{s-\ell}$$

такие что

$$X_{n,s,\ell}^{M_1}(\lambda) \geq a^{\left(\frac{1}{2} - 2\varepsilon\right)\ell} = \sqrt{a^{\ell}} \cdot a^{-2\varepsilon\ell}$$

$$n \geq s \geq \varepsilon n \qquad \ell = \bar{o}(n)$$

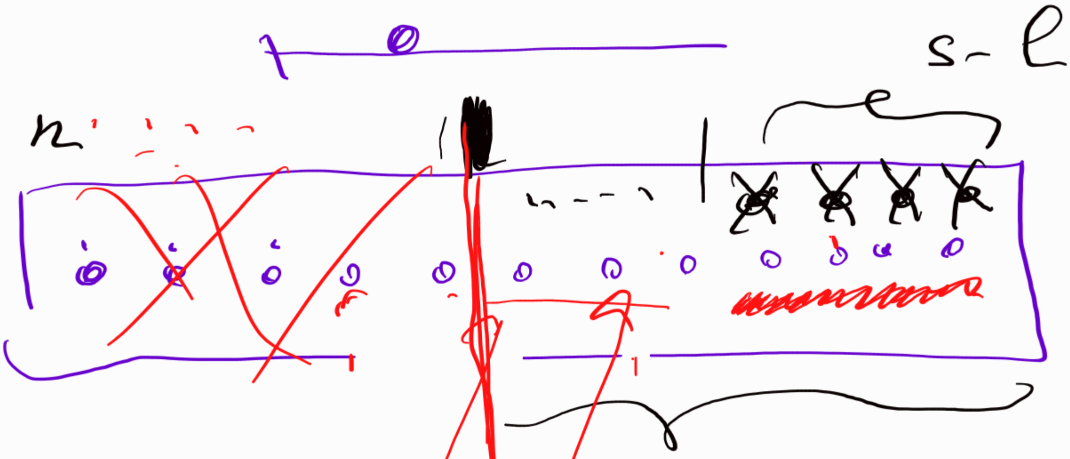
$$\mathcal{X}_n^{M_1} \longrightarrow \mathcal{X}_{ns}^{M_1} \qquad a^{\ell}$$

λ

ℓ $\qquad \lambda + w a^{s-\ell}$

$s - \ell$

n



$\sqrt{N}$

a^n

S

$\sqrt{a}\ e$

εn

l свободных букв.