4 марта 2023

Семинар Диофантовы приближения

×2×3 теорема Фюрстенберга

Основная комбинаторная лемма.

$\Sigma = \{a^u b^v\}$ $\quad (a,b)=1$

$n \in \mathbb{N}$ $\quad \boxed{N = a^n}$ $\quad \Sigma_\alpha(R) = \{\{q\alpha\} : q \in \Sigma,\ q \le R\}$

$\mathcal{X}_n^R = \{$ целые числа $\in [0, N]$ вида $[a^n \eta]$, $\eta \in \Sigma_\alpha(R)\}$ $\qquad \sqrt{N} = \sqrt{a^n}$

$\mathcal{X}_{n,s}^R = \{x \in \mathbb{Z}_+ \quad x \le a^s - 1 \quad \exists x^* \in \mathcal{X}_n^R : x \equiv x^* \pmod{a^s}\}$

(младшие цифры)

Лемма. $M_2 = M_1 \cdot a^{n-s}$ $\qquad \mathcal{X}_{n,s}^{M_1} \subset \mathcal{X}_s^{M_2}$

$\mathcal{X}_{n,s,l}(\lambda) = \{x \in \mathcal{X}_{n,s}^{M_1} : x \equiv \lambda \pmod{a^{s-l}}\}$ $\quad n \ge s \ge l$, $\quad 0 \le \lambda < a^{n-s}$

$$\bigcup_{\lambda=0}^{a^{s-l}-1} \mathcal{X}_{n,s,l}(\lambda) = \mathcal{X}_{n,s}^{M_1}$$

соглашение: $\mathcal{X}$ $\quad |\mathcal{X}_n| = X_n$ $\quad \mathcal{Y}$ $\quad |\mathcal{Y}| = Y$

$X_n = X_n^{M_1} = |\mathcal{X}_n^{M_1}|$

Основная комб. лемма.

Пусть $l = \bar{o}(n)$.

Пусть $X_n \ge c\sqrt{a^n}$

$[0\ N]$

$N = a^n$

Тогда $\forall \varepsilon > 0$ и для $n \ge n_0(c, \varepsilon)$ $\exists\, s$ из интервала $\varepsilon n \le s \le n$ $\exists\, \lambda : 0 \le \lambda < a^{s-l}$ такие что

$$X_{n,s,l}(\lambda) \ge a^{(\frac{1}{2} - 2\varepsilon) l}$$

s

Док. во

Рассмотрим $n_j = n - j\ell$

$0 \le j \le J = \left\lceil (1-\varepsilon)\frac{n}{\ell} \right\rceil$

$\varepsilon n - \ell \le n_J = n - J\ell \le \varepsilon n$

n ℓ $\sqrt{a^\ell}$ $\xi - \ell$

$(1-\varepsilon)\frac{n}{\ell} \le J \le (1-\varepsilon)\frac{n}{\ell} + 1$

$n - \varepsilon n \le J\ell \le n + \ell - \varepsilon n$

$\varepsilon n - \ell \le n - J\ell \le \varepsilon n$

Сколько всего различных вычетов по mod a^{n_J}?

Дирихле: $\exists \lambda_0 \bmod a^{n_J}$ такое что

$\mathfrak{X}_n' = \mathfrak{X}_n \cap \{x \pmod{a^n} : x \equiv \lambda_0 \pmod{a^{n_J}}\}$

$X_n' \ge X_n / a^{n_J} \ge N^\omega$ $\quad \omega = \frac{1}{2} - 2\varepsilon$

$X_n \ge c\, a^{n/2}$ $\quad a^{n_j} \le a^{\varepsilon n}$ $\quad \frac{1}{2} - \varepsilon - \varepsilon$

чтобы убить константу c.

Берём $s \le n$ и рассматриваем множества

$\mathfrak{X}_{n,s}' = \{x' \pmod{a^s} : \exists x^* \in \mathfrak{X}_n' \text{ такой что } x' \equiv x^* \pmod{a^s}\}$.

Если взял $s = n_J$

$\mathfrak{X}_{n,n_J}'$ $\quad X_{n,n_J}' = |\mathfrak{X}_{n,n_J}'| = 1$

этого достаточно для леммы

Будем доказывать следующее:

$\exists j \in \{0, 1, \dots, J\}$, $\exists \lambda \bmod a^{n_j - \ell}$

такие что $X_{n,n_j}'(\lambda) \ge a^{\omega \ell}$ $(*)$.

$\mathfrak{X}_{n,n_j}' = \{x \in \mathfrak{X}_{n,n_j}' : x \equiv \lambda \pmod{a^{n_j - \ell}}\}$

S из леммы будет $S = n_j$

$a^{n_j - \ell} \ge a^{n_J}$

должно быть тем)

Доказываем (*) от противного.

Предположим $\forall j \in \{0, 1, \ldots J\}$ $\forall \lambda_j \pmod{a^{n_j - \ell}}$

выполнено $X'_{n, n_j, \ell}(\lambda) < a^{\omega \ell}$!

$$\bigcup_{\lambda \bmod a^{n_j - \ell}} \mathcal{X}'_{n, n_j, \ell}(\lambda) = \mathcal{X}'_{n, n_j}$$

Докажем, что $\boxed{X'_{n, n_j} > a^{\omega n_j}}$ (**)

Докажем по индукции

основание $j = 0$ $n_0 = n$ $X'_n = X'_{n_0} > N = a^{\omega n}$

шаг.

предположение индукции $\boxed{X'_{n, n_j} > a^{\omega n_j}}$

$\lambda_1 \neq \lambda_2 \bmod a^{n_{j+1}}$ $\mathcal{X}'_{n, n_j, \ell}(\lambda_1) \cap \mathcal{X}'_{n, n_j, \ell}(\lambda_2) = \varnothing$

$$X'_{n, n_{j+1}} = |\mathcal{X}'_{n, n_{j+1}}| = |\{\lambda \pmod{a^{n_{j+1}}} : \mathcal{X}'_{n, n_j, \ell}(\lambda) \neq \varnothing\}|$$

$$X'_{n, n_{j+1}} \geq \frac{X'_{n, n_j}}{\max_\lambda X'_{n, n_j, \ell}(\lambda)} \geq a^{\omega n_j - \omega \ell} = a^{\omega n_{j+1}}$$

принцип Дирихле.

Шаг индукции сделан.

(**) - доказано.

$j \longmapsto J$ $\quad X'_{n, n_J} \geq a^{\omega n_J} > 1$

$1 \; {}^{\shortparallel} \longleftarrow$ противоречие.

ВСЁ

В итоге мы получили

мы по mod a^ℓ

заменить по mod a^ℓ

b^n $\left| \frac{x}{a^n} - \{\alpha q\} \right| < \frac{1}{a^n}$

$0 \le n \le \operatorname{ord}_a e^b$ $\qquad \{ b^n \{\alpha q\}\} = \{ b^n q \alpha \}$