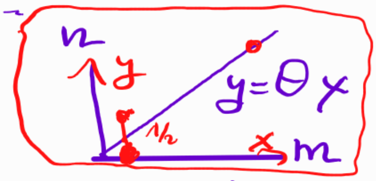
Спецкурс "Задачи теории Диофантовых приближений"

25 марта 2023.

Размерность подпространств наилучших приближений.

Moshchevitin Russian Math. Survey
"Khintchine singular systems..."



$x \in \mathbb{R}^m$
$y \in \mathbb{R}^n$

1. Совместные приближения:

$m = 1 \quad n \geq 2.$

Приближаем прямую. $\Theta = (\alpha_1 \ldots \alpha_n)$

$\alpha = (1, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$

$n=1$
$\alpha = \frac{1}{2}$

Условие (ЛН) эти числа линейно независимы над $\mathbb{Q}$

$$\psi(t) = \min_{\substack{q \leq t \\ q \in \mathbb{Z}_+}} \max_{1 \leq j \leq n} \|q\alpha_j\|$$

индекс здесь не пишем

$z_\nu = (x_\nu\, y_{1\nu} \ldots y_{n\nu})$ вектора наил. приб.

метрике Хорошо.

Утв. При усл (ЛН).

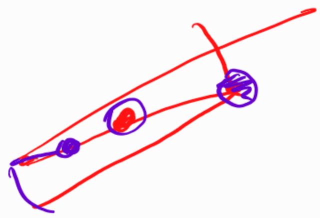
1° $n=1$ $\begin{vmatrix} x_\nu & y_{1\nu} \\ x_{\nu+1} & y_{1\nu+1} \end{vmatrix} = (\pm 1).$

2° $n \geq 2$ Теорема Ярника: $\exists\, \delta, \nu$: $z_{\nu-1}$, z_ν и $z_{\nu+1}$ лин. нез.

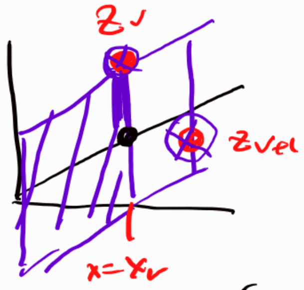
Д. во От противного!

Зачем (z_v, z_{v+1}) — всегда независимы

$z_v\, z_{v+1}$ — примитивная пара.



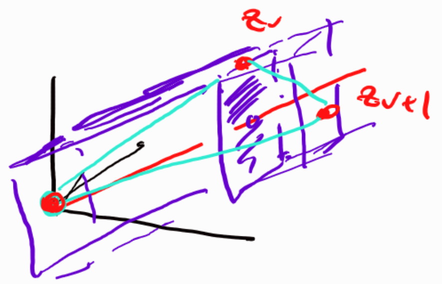
сечение $x = x_v$

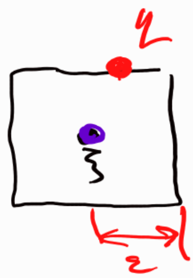


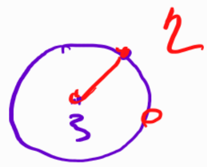
$$\Pi_v = \{ 0 \le x \le x_v : \max_{1 \le j \le n} |x\alpha_j - y_j| \le \le \max_{1 \le j \le n} \|x_v \alpha_j\| \}$$

$\xi = (\xi_1 \ldots \xi_n)$ $\eta = (\eta_1 \ldots \eta_n)$

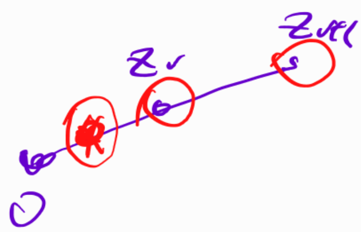
$$\max_{1 \le i \le n} |\xi_i - \eta_i| = \varepsilon$$







$(z_v\, z_{v+1})$ дополнение до базиса в $\mathbb{Z}^{n+1}$



(z_{v-1}, z_v) — нез. $\Pi_{v-1} = \langle z_{v-1}, z_v \rangle_{\mathbb{R}}$

(z_v, z_{v+1}) — нез. $\Pi_v = \langle z_v, z_{v+1} \rangle_{\mathbb{R}}$

Как связаны Π_{v-1} и Π_v

$\Pi_{v-1} = \Pi_v \quad \forall v \ge v_0$

$\exists$ двумерное подпр-во $\mathcal{L}_0 < \mathbb{R}^{n+1}$

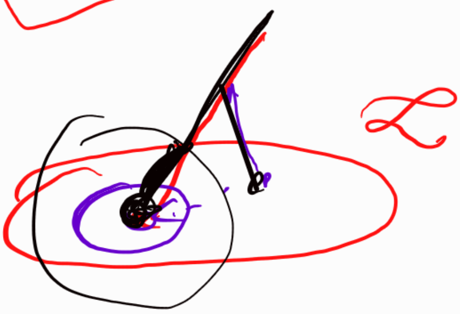
$z_v \in \mathcal{L} \quad \forall v \ge v_0.$

Хорошие обозначения

$\alpha = (\alpha_1, \ldots \alpha_n)$

$\bar\alpha = (1, \alpha_1, \ldots \alpha_n) = (1, \alpha)$

$\boxed{\text{Упр Докажите, что } \bar\alpha \in \mathcal{L}_0.}$



А это уже противоречие с (ΛH).

$2\ 1^\circ \quad n = 2$

Упр Докажите ещё одну теорему Ярника при $m = 1$, $n = 2$ при условии (ΛH)

Выполняется

$$\omega \geq \hat\omega \cdot \frac{\hat\omega}{1 - \hat\omega}$$

$d = m + n = 3$

Возвращаемся к случаю $n \geqslant 2$.

НЕзависимые приближение тройки.

ν : $z_{\nu-1}$ z_ν $z_{\nu+1}$ независимы.

такие ν образуют последовательность.

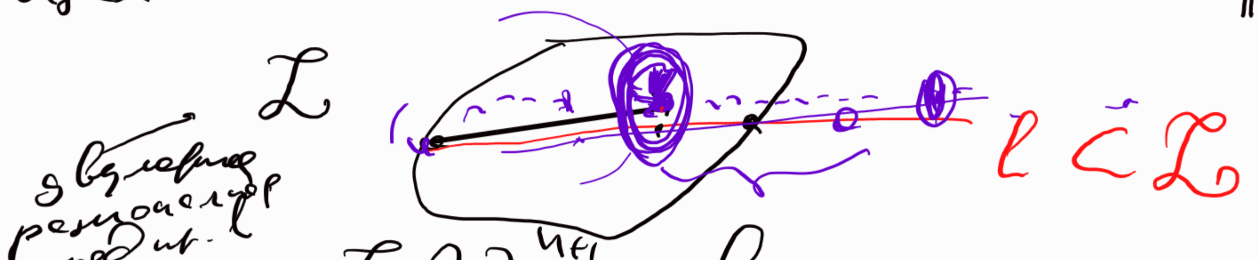
$\nu_1 < \nu_2 < \nu_3 \ldots$

Факт (Лагариас) $\forall$ [illegible] $\tau(j)$

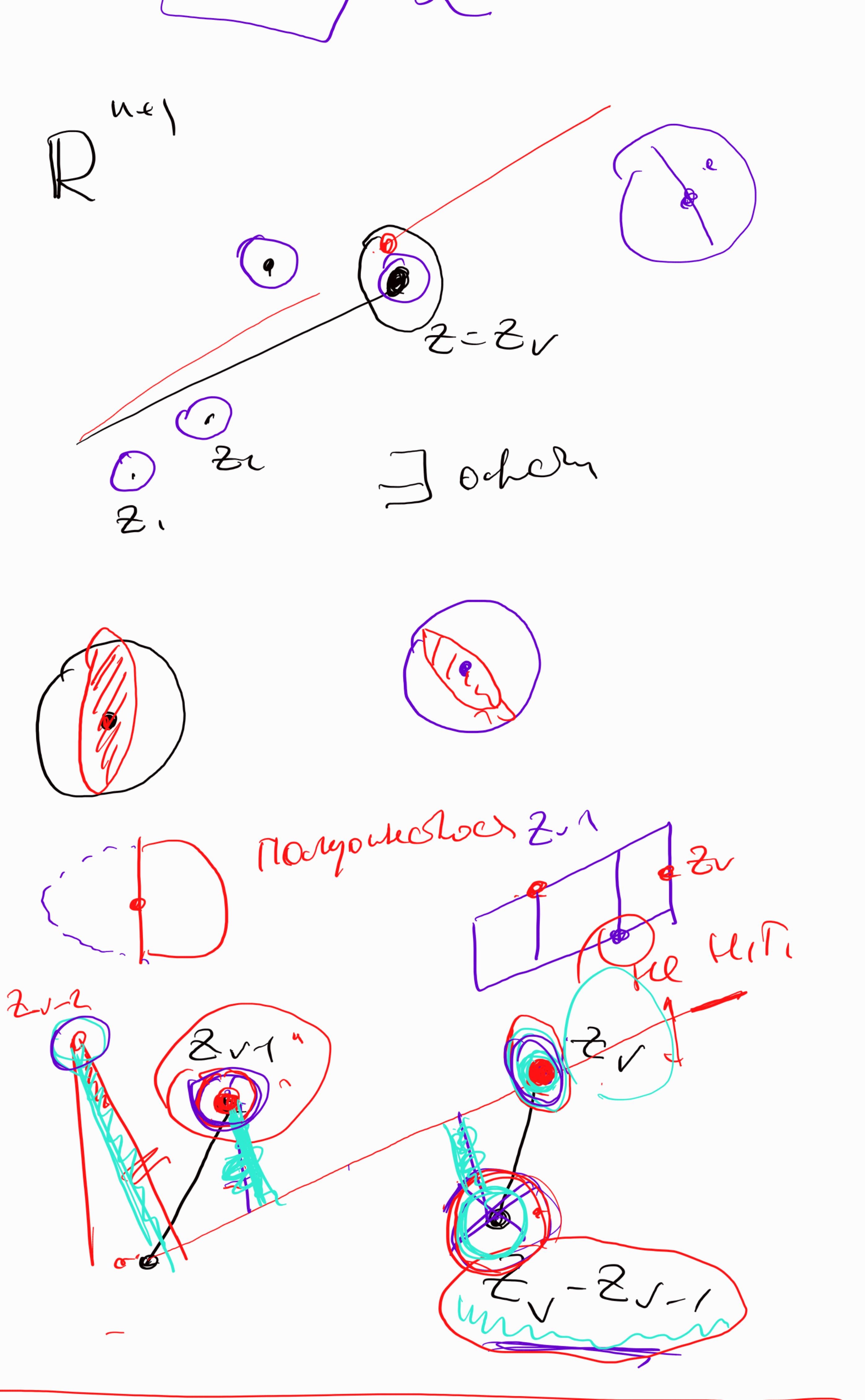
$\exists\, \alpha \in \mathbb{R}^n$ с условием (ЛН)

такое что $\nu_{j+1} \geqslant \tau(j+1) + \nu_j$

Идея док-ва очевидна



$\mathcal{L} \cap \mathbb{Z}^{n+1}$ = двумер. решётка



R^{n+1}
$z = z_\nu$
z_2
z_1
∃ окрестн
Полуокрестность $z_{\nu-1}$
z_ν
не ист
$z_{\nu-2}$
$z_{\nu-1}$
z_ν
$z_\nu - z_{\nu-1}$

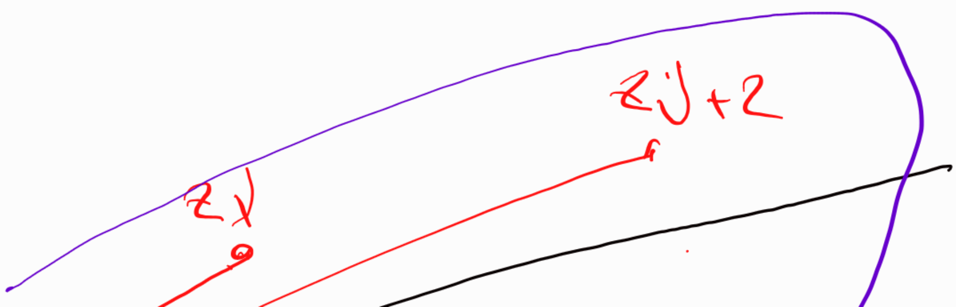
Факт 2 $\forall n \geq 2$ $\exists \alpha$ с усл (ΛH) такое что $\forall \nu$ ранг матриц
$$\begin{pmatrix} z_\nu & z_{\nu+1} & \ldots & z_{\nu+n} \end{pmatrix}$$
не превосходит 3

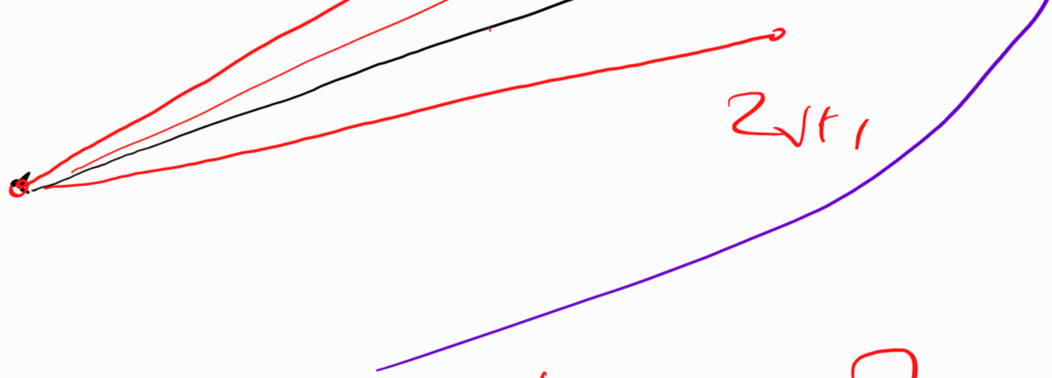
Идея

$$R(\alpha) = \min \{ s \mid \exists \nu_0 \ \exists \mathcal{L} \subset \mathbb{R}^{n+1}, \ \dim \mathcal{L} = s \ \text{такое что} \ z_\nu \in \mathcal{L} \ \forall \nu \geq \nu_0 \}.$$

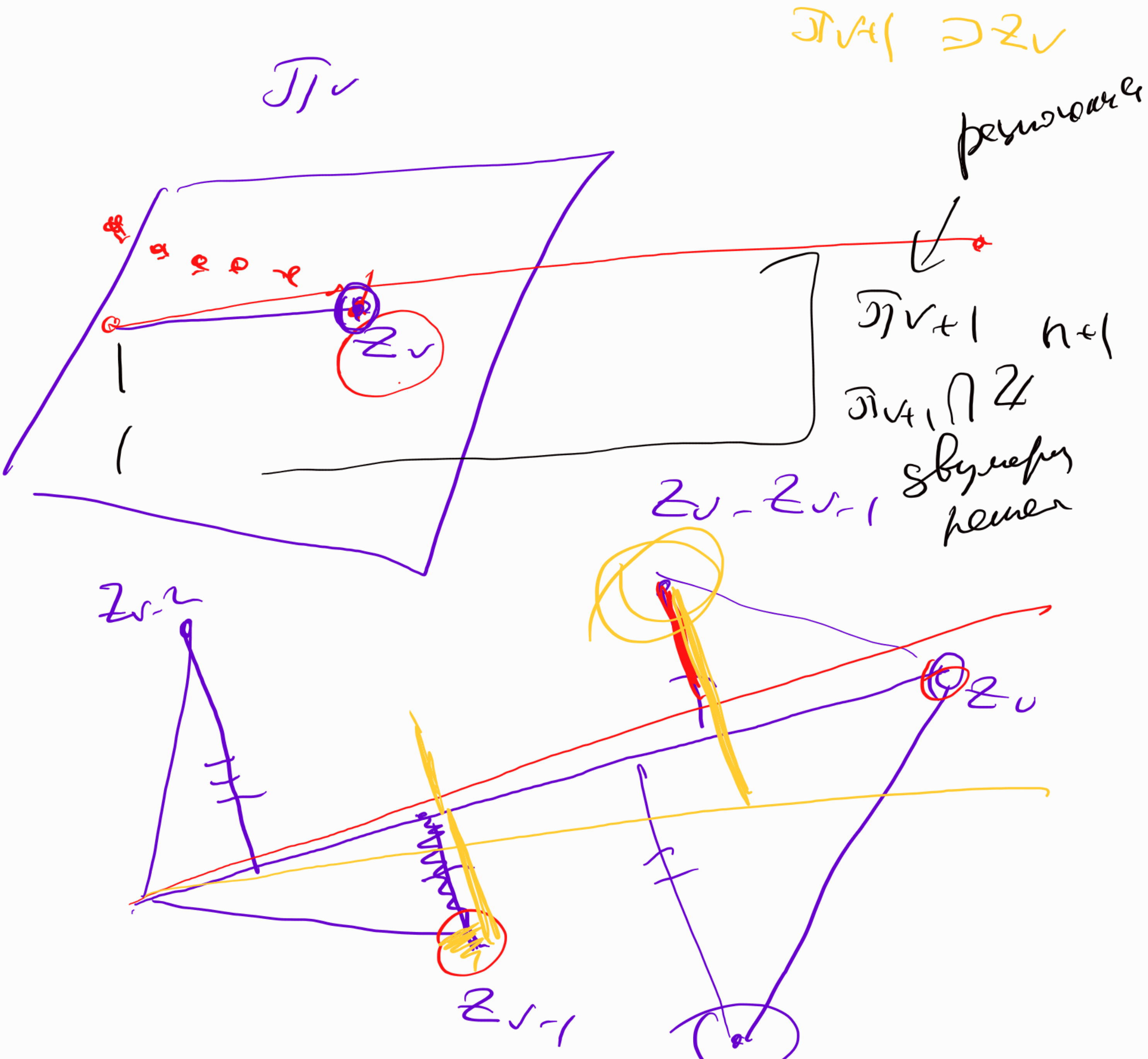
Упр $R(\alpha) =$ количество линейно независимых над $\mathbb{Q}$ чисел среди $1, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$,

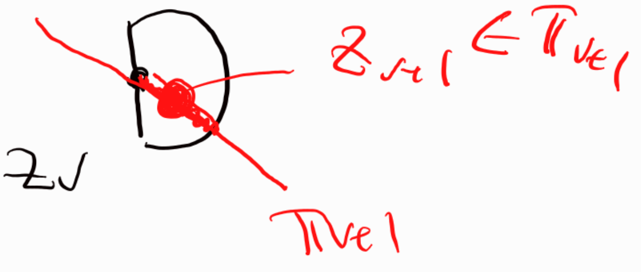
В частности если выполнено усл (ΛH) то $R(\alpha) = n+1$

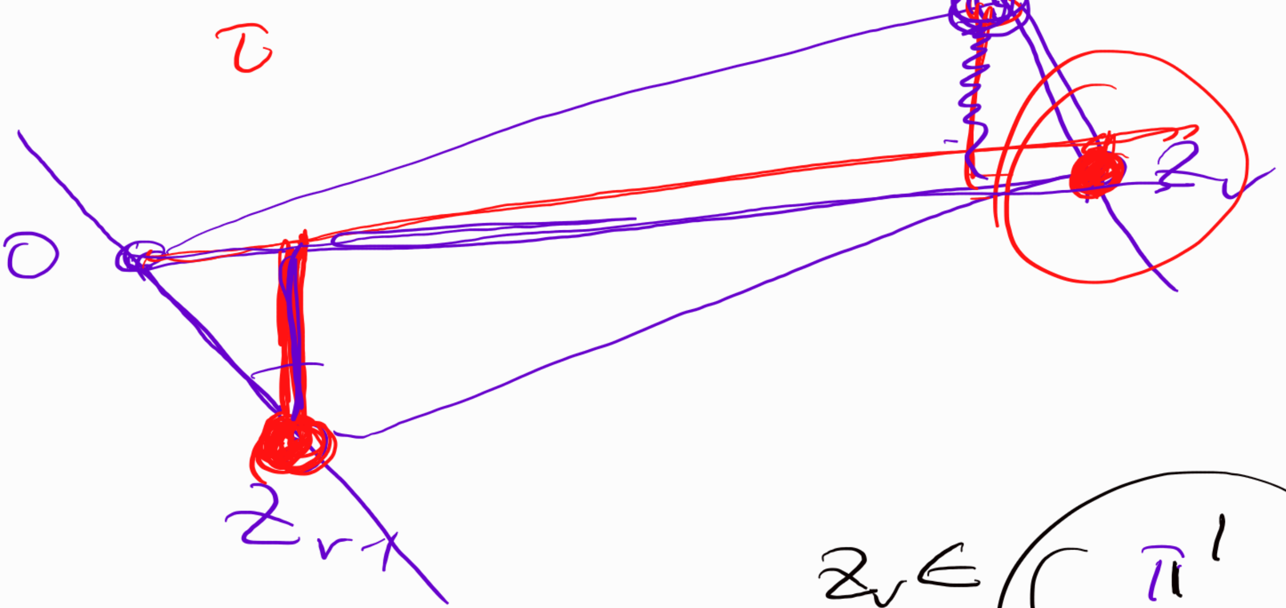




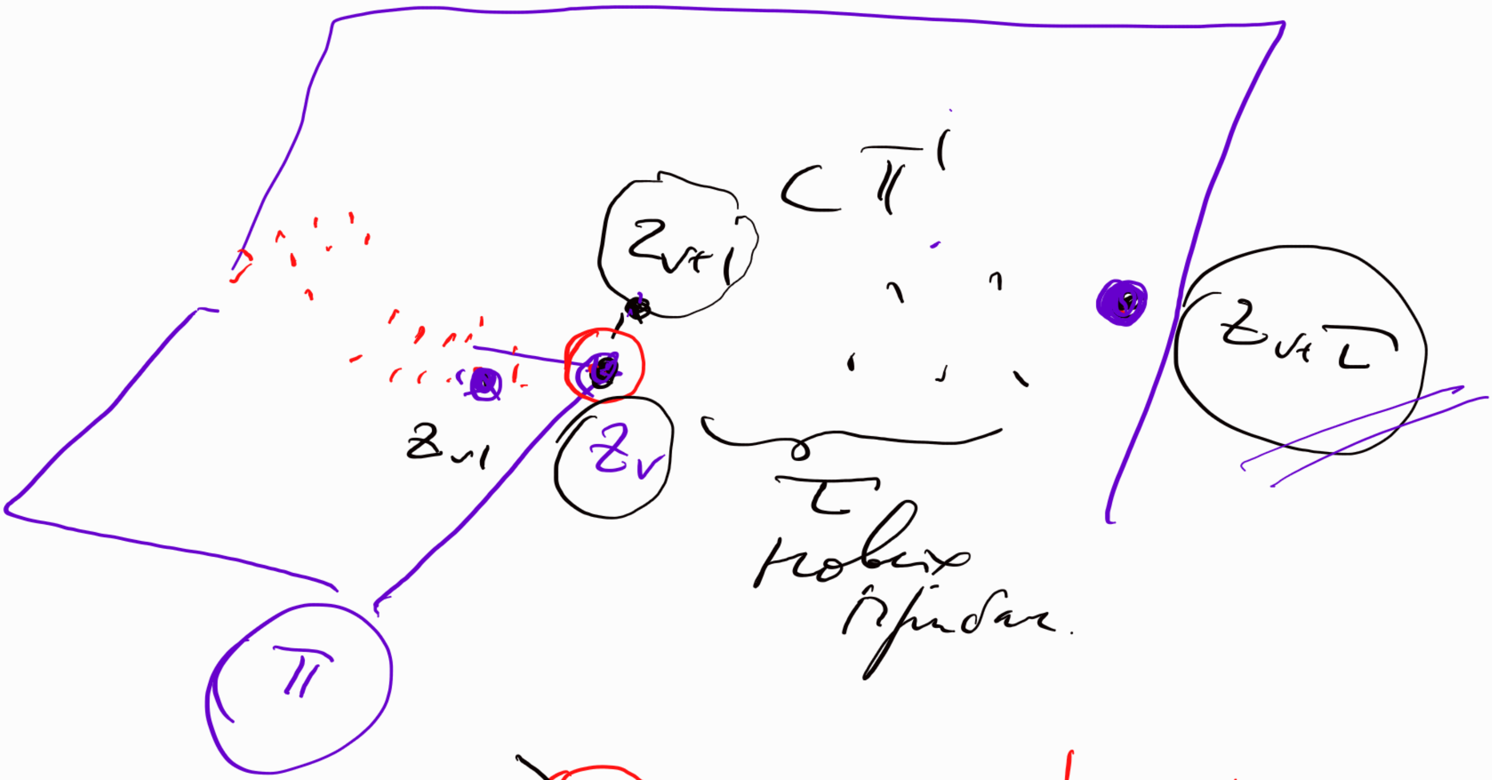
Объясняю фиг. 2

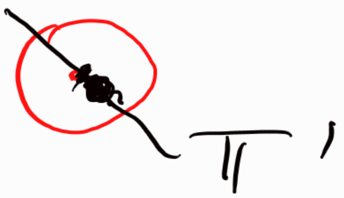






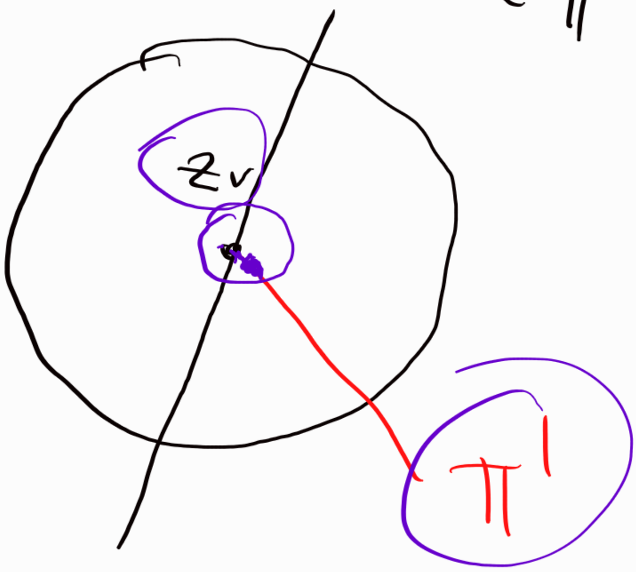
$z_v \in \Pi'$



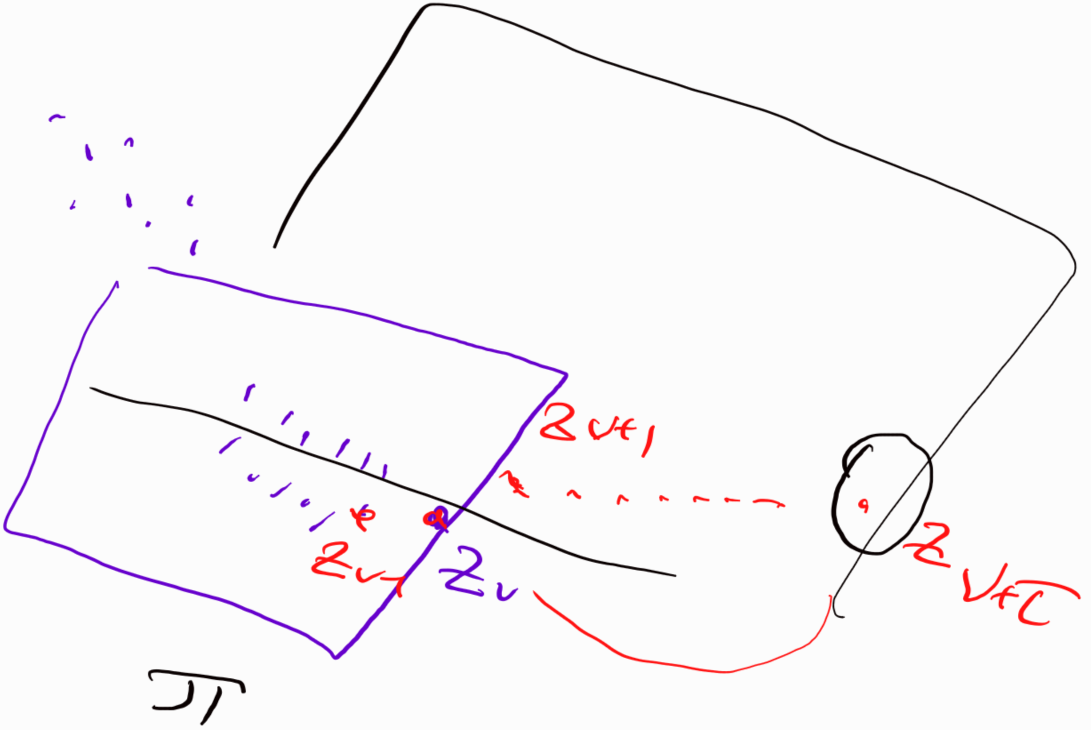


$\Pi' \cap \mathbb{R}^{n+1}$

$\mathbb{R}^{n+1} \setminus \Pi$



$\min \rho(x, y) > 0$
$x \in \mathbb{R}^{n+1} \cap \Pi'$
$y \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \Pi'$



π''

$$\operatorname{span}(\pi \cup \pi' \cup \pi'' \ldots) = \mathbb{R}^{n+1}$$

---

2. Одна линейная форма

$n = 1 \quad m \geq 2.$

<u>Теор 1 Ярника</u> (ЛН) $\Rightarrow$

$\exists$ б.м. $>$ z_{v-1}, z_v, z_{v+1}

лин. нез.

<u>Теор 2 Ярника.</u> $n=1 \quad m=2.$

усл (ЛН) $\Rightarrow$

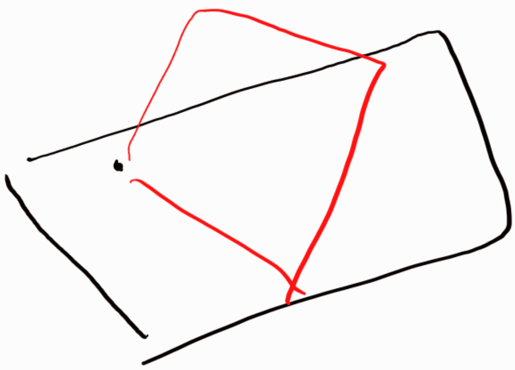
$$\omega \geq \hat{\omega}(\hat{\omega}-1)$$

(с прошлой недели).

Факт 2. Если $m \geq 2$

$\exists\ \alpha$ с усл. (1.Н)

Тогда и $R(\alpha) = 3$



$\mathbb{R}^{n+1}$

$\mathcal{L}$ $\dim \mathcal{L} = n$

$\exists \nu_0\ \exists \mathcal{I} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ $\dim \mathcal{I} = 3$

$\forall \nu \geq \nu_0$ вып. $z_\nu \in \mathcal{I}$.