Спецкурс

"Задачи теории Диофантовых приближений"

25 февраля 2023

Лекция 3

"Цепные дроби и Диофантовы спектры"

О цепных дробях (основы)

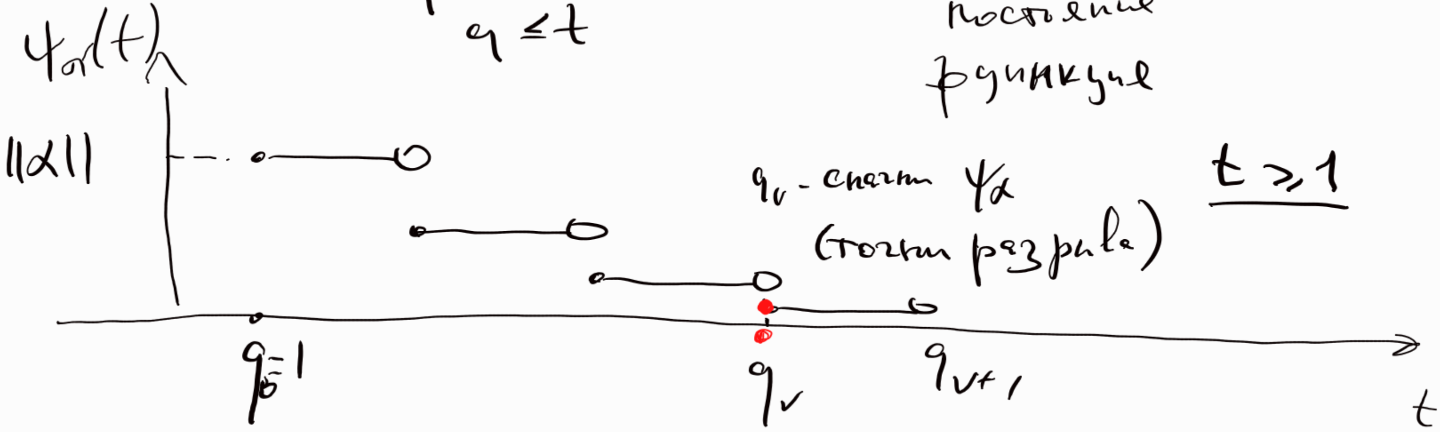
- Хинчин "Цепные дроби"
- Rockett, Szusz "Continued frac."

$\alpha \in \mathbb{R}$.

(Обыкновенная) функция меры иррациональности

$\|\xi\| = \min_{a \in \mathbb{Z}} |\xi - a|$ – расстояние до ближ. целого.

$\psi_\alpha(t) = \min_{q \in \mathbb{Z}_+,\ q \le t} \|q\alpha\|$ – кусочно постоянная функция $\mathbb{Z}_+ = \{1, 2, 3, \dots\}$



q_ν - скачки ψ_α (точки разрыва)

$t \geq 1$

$q_\nu \le t < q_{\nu+1}$ $\quad \psi_\alpha(t) = \|q_\nu \alpha\|$.

Теорема Лагранжа: q_ν – это в точности знаменатели подх. дробей к α.

$$\alpha = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 \ldots}}} \qquad a_0 \in \mathbb{Z}, \quad a_j \in \mathbb{N}$$

$$\frac{p_\nu}{q_\nu} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \ldots + \cfrac{1}{a_\nu}} = [a_0; a_1, \ldots a_\nu]$$

Упр: узнать док-во теор Лагранжа.

Указание а) найти его в книжке Хинчина

б) найти в формулировке из книжки Хинчина ошибку.

Геометрия $\longleftrightarrow$ см. статью О.Н.Германа arXiv ....

Формула Перрона

$q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}$

$$\|q_n \alpha\| = |\alpha q_n - p_n| = \frac{1}{q_n(\alpha_{n+1} + \alpha_n^*)} = \frac{1}{q_n \alpha_{n+1} + q_{n-1}}$$

$$\alpha_{n+1} = [a_{n+1}; a_{n+2}, a_{n+3} \ldots]$$

$$\alpha_n^* = [0; a_n, a_{n-1} \ldots a_1] \qquad \alpha_n^* = \frac{q_{n-1}}{q_n}$$

или

$$q_n \|q_n \alpha\| = \frac{1}{\underbrace{\frac{1}{\alpha_{n+2}}}_{\in[0,1]} + a_{n+1} + \underbrace{\alpha_n^*}_{\in[0,1]}} = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_{n+2}} + \frac{1}{\alpha_{n+1}^*}}$$

самое симметричное выражение

$$\alpha_{n+1} = a_{n+1} + \frac{1}{\alpha_{n+2}}$$

О доказательство формулы Перрона.

$$\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} = \frac{a_{n+1} p_n + p_{n-1}}{a_{n+1} q_n + q_{n-1}}$$

полагаем

$$\alpha_{n+1} \rightsquigarrow a_{n+1}$$

дробно лин. ф-ция от α_{n+1} неполное частное

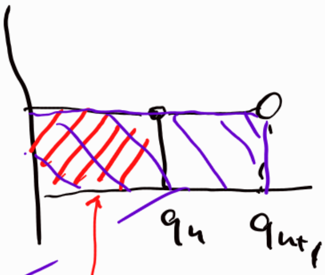
$$\alpha = \frac{\alpha_{n+1} p_n + p_{n-1}}{\alpha_{n+1} q_n + q_{n-1}}$$

заменяя

$$\alpha = [a_0; a_1, \dots, a_n, \alpha_{n+1}]$$

весь хвост положили вместо a_{n+1}

$$\alpha = [a_0; a_1 \dots a_n, a_{n+1}, a_{n+2} \dots]$$



$$\psi_\alpha(q_n) = \frac{1}{q_n(\alpha_{n+1} + \alpha_n^*)}$$

$$q_n \|q_n \alpha\| = \frac{1}{\alpha_{n+1} + \alpha_n^*}$$

площадь прямоугольника

фиолетовая площадь

$$q_{n+1} \|q_n \alpha\|$$

$$\frac{1}{\alpha^*_{n+1}}$$

$$q_{n+1} \|q_n \alpha\| = \frac{q_{n+1}}{q_n} q_n \|q_n \alpha\| =$$

$$= \frac{1}{\alpha^*_{n+1}} \cdot \frac{1}{\frac{1}{\alpha_{n+2}} + \frac{1}{\alpha^*_{n+1}}} = \frac{1}{1 + \frac{\alpha^*_{n+1}}{\alpha_{n+2}}} =$$

$$= \frac{1}{1 + \alpha^*_{n+1} \cdot \frac{1}{\alpha_{n+2}}}$$

$\alpha_{n+1}, \frac{1}{\alpha_{n+2}} \in [0,1]$

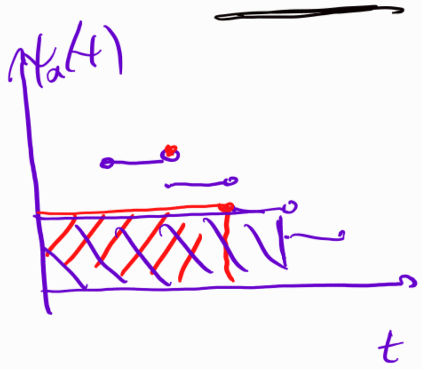
Две формулы: $q_n \|q_n \alpha\| = \frac{1}{\alpha_{n+1} + \alpha_n^*}$; $q_{n+1} \|q_n \alpha\| = \frac{1}{1 + \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_{n+2}}}$

сумма

представление.

$\alpha_{n+1} = a_{n+1} + \frac{1}{\alpha_{n+2}}$

1947. M. Hall "On sums and products of c.f."



Пусть $\alpha \notin \mathbb{Q}$

$$\lambda(\alpha) = \varliminf_{t\to\infty} t\,\psi_\alpha(t)$$ — постоянная Лагранжа

$$d(\alpha) = \varlimsup_{t\to\infty} t\,\psi_\alpha(t)$$ — постоянная Дирихле.

$$\lambda(\alpha) = \varliminf_{n\to\infty} q_n \|q_n \alpha\| \; ; \quad d(\alpha) = \varlimsup_{n\to\infty} q_{n+1} \|q_n \alpha\|.$$

$\boxed{\text{Ясно что } \psi_\alpha(t) \le \frac{1}{t}}$ — упражнение

$0 \le \lambda(\alpha) \le d(\alpha) \le 1$

Если $d(\alpha) = 1$ то $\lambda(\alpha) = 0$

$$d(\alpha) = 1 \iff \lambda(\alpha) = 0$$

$\boxed{\text{Теор } \forall \alpha \notin \mathbb{Q} \quad \lambda(\alpha) \le \frac{1}{\sqrt{5}}}$

следствие теор Гурвица.

$$\lambda\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Спектр Лагранжа

$$\mathbb{L} = \{\lambda : \exists \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} : \lambda = \lambda(\alpha)\}$$

(сложная структура

$\mathbb{L}$: $[0, \lambda^*] \; \cup \; \frac{1}{3} \; \underbrace{\dots \frac{1}{\sqrt{221}/5}, \frac{1}{\sqrt{8}}, \frac{1}{\sqrt{5}}}_{\text{Дискретная часть}}$

Луч Холла

λ^* — последняя Фрейман (197. е годы)

Марков

точка концентрации

связана с хитрой наукой и "числами Маркова"

Про $\mathbb{L}$ ЕСТЬ продвинутая теория.

см. книгу Cusick + Flahive "Markoff and Lagrange spectra"

+ Касселс "Введение в Д. Приб"

Markoff

Спектр Дирихле.

$$\mathbb{D} = \{d : \exists \alpha : d = d(\alpha)\}.$$

$$\mathbb{D} : \underbrace{\overbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{5}}}^{d_0}, \dots d_0^*}_{\text{дискретная часть}} \quad \underbrace{\quad}_{\text{сложная структура}} \quad [d^*, 1]$$

точка накопления

число Сенелета

целый отрезок

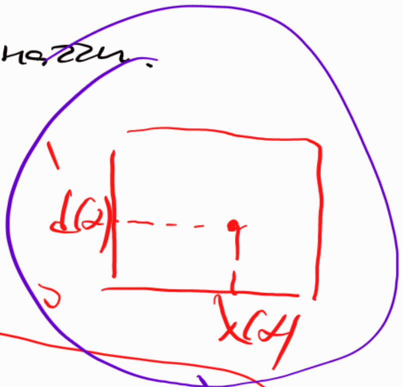
$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{5}} = d\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$$

Наука о $\mathbb{D}$ проще. d^* — неизвестно.

$F_0 = 0, \; F_1 = 1 \qquad F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ числа Фибоначчи.

$$f_n(x) = F_{n+2}x^2 + 2F_{n+1}x + F_{n+1}$$

$$\alpha_n > 1 \qquad f_n(\alpha_n) = 0.$$



Теор (Morimoto, Lesca)

$$\{d(\alpha_n)\}_{n=1}^{\infty} = \mathbb{D} \cap [d_0, d_0^*)$$

Реклама. Док-во я буду рассказывать на след. неделе.

$$\alpha_n = [\overline{\underbrace{1, \dots, 1}_{2n-1}, 2}]$$

Теор Холла $\exists \lambda^* > 0: [0, \lambda^*] \subset \mathbb{L}$

Упражн. $\exists d^* < 1 \quad [d^*, 1] \subset \mathbb{D}$

Док-во теор Холла

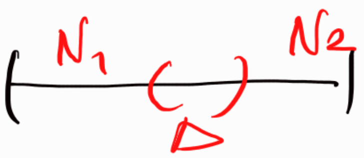
О канторовых множествах.

Опр. τ — множество $\tau > 0$

I — отрезок.

$|\cdot|$ — длина отрезка

C это τ-мн-во если оно может быть получено с помощью следующих преобразований



$\Delta \subset I$ интервал

$I = N_1 \sqcup \Delta \sqcup N_2$

$$\min_{j=1,2} |N_j| \geq \tau |\Delta|$$

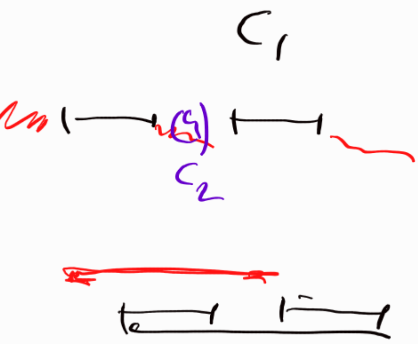
Опр. $C = I \setminus \left(\bigcup_\nu \Delta_\nu\right)$ $\quad \Delta_\nu \cap \Delta_{\nu'} = \emptyset$

наз τ-мн. кан. Если каждый инт Δ_ν выкидывался из какого-то отрезка $I_\nu \supset \Delta_\nu$

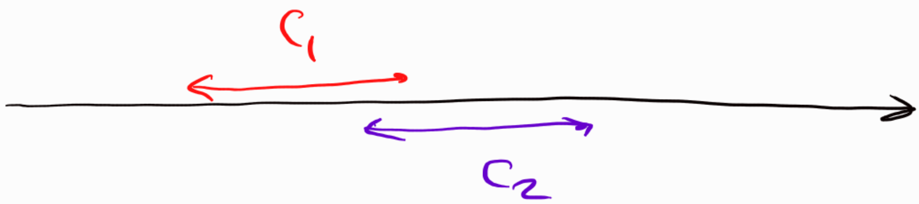
$$I_v = N_1 \cup \Delta_v \cup N_2$$

и $\min |N_i| \geq \tau |\Delta|$

Пусть $\tau_1 \cdot \tau_2 \geq 1$



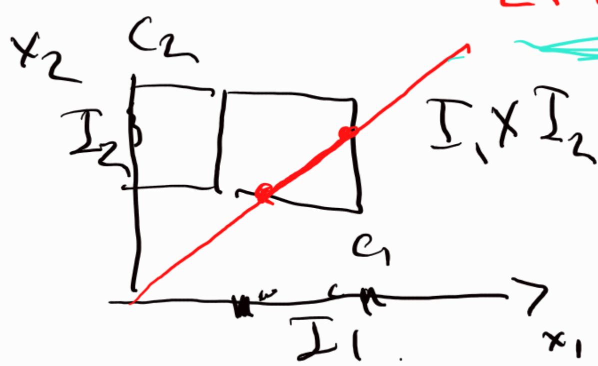
Лемма 1. Если C_1 и C_2 суть τ_1 и τ_2 множества, ни одно из которых не лежит в связной компоненте дополнения к другому. То $C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$.



Д-во

$\tau_1 = \tau_2 > 1$ (рассмотрим этот частный случай)

$\ell: \{x_1 = x_2\}$



$I_1 \times I_2 \supset C_1 \times C_2$

$\mathbb{R}^2(x_1, x_2)$

$C_1 \times C_2 \subset I_1 \times I_2$

$C_1 = I_1 \setminus \bigcup D_{1v}$

$C_2 = I_2 \setminus \bigcup D_{2v}$

$C_1 \cap C_2 = \emptyset$

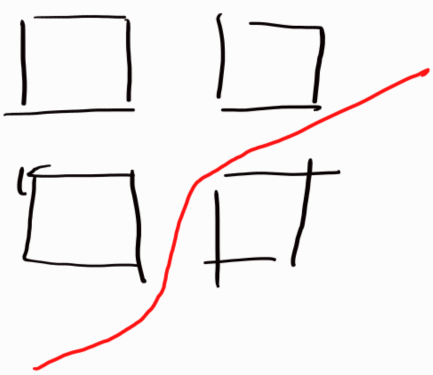
$I_1 \times I_2 \cap \ell \neq \emptyset$ Предположим про...

компакт ~ он покр. $\cup \Delta_1 \times \mathbb{R}_{x_1} \cup \ldots \cup \mathbb{R}_{x_2} \times \Delta_2 \cup$

полоса

$\Delta \times \mathbb{R}$ – открыто

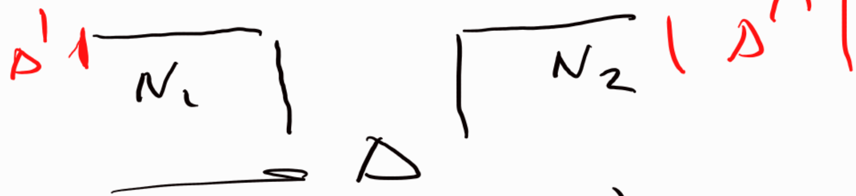
Выбираем конечное подпокрытие.



ℓ

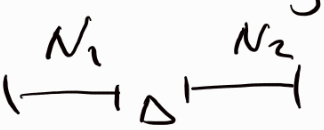
и берём в нём щель минимальной длины!

$$\begin{cases} |N_1| > \ldots |\Delta| \\ |N_2| > \ldots |\Delta| \end{cases}$$



полоса минимальной длины

I



(тогда $\Delta = \cancel{\Delta}\, 1 \cup$)

$I \setminus \cup \Delta$

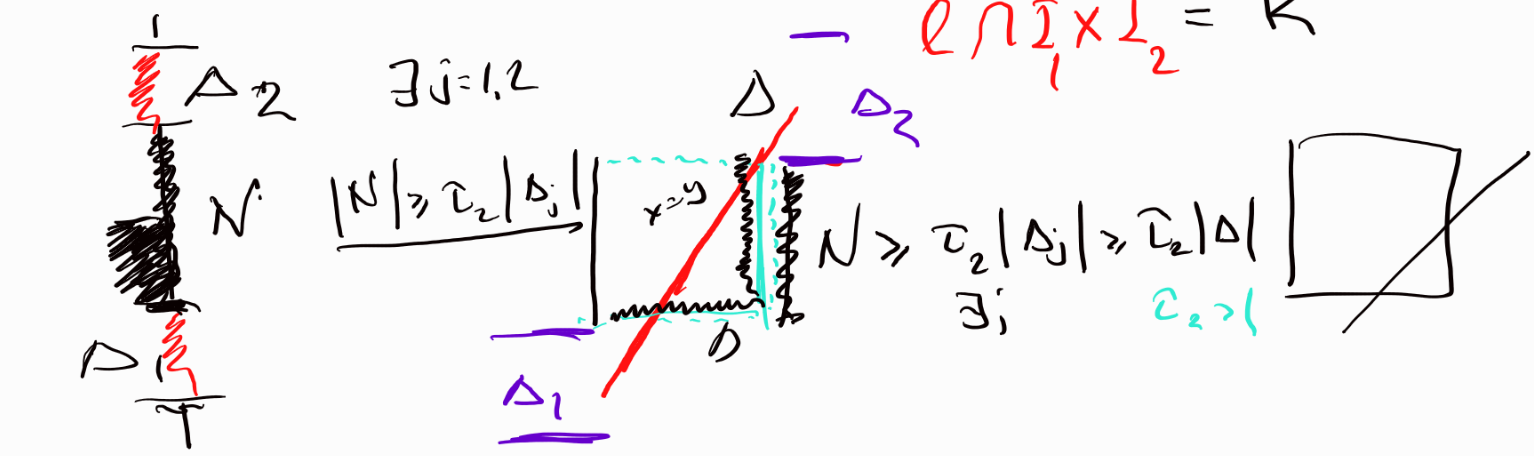
$I_1 \times I_2 \cap \ell$ – компакт.

$$\ell \supset \bigcup_{\nu_1=1} \Delta_{1,\nu_1} \times \mathbb{R} \cup$$

$$\cup \bigcup_{\nu_2=2}^{T2} \mathbb{R} \times \Delta_{2\nu_2}$$

Пусть $\Delta^*_{1\nu}$ – мин. ширина полосы.

C_2



Δ_2, Δ_1

Δ_1 и Δ_2 – ширины полос, через концы K „входит" ℓ в Δ и „выходит" из Δ.

$$|\Delta| \leq |\Delta_1|$$

$$|\Delta| \leq |\Delta_2|$$

Лемма док.

Лемма 2 $\mathcal{F}_4 = \{ \alpha \in \mathbb{R} \cap [0,1] :$
$\alpha = [0; a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots]$
$a_i \leq 4 \}$.

$\mathcal{F}_4$ – эл. τ-мн-во
с $\tau > 1$

Упр. Доказать Лемму 2.

$\min \mathcal{F}_4 = [0; \overline{4,1}] - A$

$\max \mathcal{F}_4 = [0; \overline{1,4}] - B$

$I = [A; B]$ $\qquad \mathcal{F}_4 = I \setminus \bigcup_{v=1}^{\infty} \Delta_v$

A  B

$\boxed{\text{Следств.} \quad \mathcal{F}_4 + \mathcal{F}_4 = \{\lambda : \exists x, y \in \mathcal{F}_4 : \lambda = x + y\} \text{ это отрезок, длины } > 1}$

$\mathcal{F}_4 + \mathcal{F}_4 = I + I$

$\mathcal{F}_4 \cap (\lambda - \mathcal{F}_4) \neq \emptyset \quad \forall \lambda \in [2A, 2B]$

по лемме 1

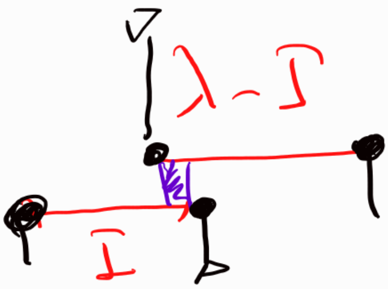
$I \supset \mathcal{F}_4$ $\qquad \lambda \in 2I = I + I$

$\lambda - I \cap I \neq \emptyset$

$I \setminus \bigcup \Delta_v$

$\mathcal{F}_4 \cap \lambda - \mathcal{F}_4$

$I \qquad \lambda - I$



$\mathcal{F}_4 = I \setminus \dots$

$\lambda - \mathcal{F}_4 = (\lambda - I) \setminus \dots$

$I \cap \lambda - I \neq \emptyset$

Ред $\forall a \in \mathbb{R}$ $\exists x, y \in \mathcal{F}_4$ $z \in \mathbb{Z}$

Вычисл. $\forall a \in \mathbb{R} \quad \exists x, y, z \ldots$

$$\boxed{a = x + y + z}$$

$x = [0; x_1, x_2, x_3 \ \ldots\ ]$ $x_j \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$y = [0; y_1, y_2, y_3 \ \ldots\ ]$ $y_j \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$z \geq 6.$

$x \leftarrow \alpha_n^*$ $\quad \alpha_{n+1} \to y$

$\alpha = [0; x_1 z y_1 \ x_2 x_1 z y_1 y_2 \ x_3 x_2 x_1 z y_1 y_2 y_3 \ldots$

$(x_n \ \ldots \ x_1 \ z \ y_1 \ldots \ y_n)$

α — состоит из таких блоков.

$$\lambda(\alpha) = \frac{1}{z + y + x}$$

$$\lambda(\alpha) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\alpha_{n+1} + \alpha_n^*}$$

$\forall \lambda \leq \frac{1}{7} \quad \exists \alpha \quad \lambda = \lambda(\alpha)$