Спецкурс

Задачи теории Диофантовых приближений.

22 апреля 2023.

Приближение на кривой Веронезе.

Совместные приближения к числам $\xi, \xi^2, \xi^3, \dots, \xi^n$

ξ^1, ξ^2, ξ^n

$$\tau = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0.618\dots$$

$$\Theta = \begin{pmatrix} \xi \\ \xi^2 \\ \vdots \\ \xi^n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n. \quad \hat{\omega}(\Theta) \text{ — равномерная диофантова экспонента}$$

Пусть $q_\nu \in \mathbb{N}$ знаменатели наилучших совместных приближений к Θ

$\hat{\omega}_n$ приближения n первых степеней ξ

$$\hat{\omega}(\Theta) = \sup\{\gamma : \text{при } \nu \to \infty \quad \psi_\nu \ll q_{\nu+1}^{-\gamma}\}$$

$$\psi_\nu = \max_{1 \le i \le n} \|\theta_i q_\nu\|$$

$$\boxed{\frac{1}{n} \le \hat{\omega}_n \le 1}$$

Теор 1 Если $\xi \notin \mathbb{Q}$ и не квадрат. irr., то $\hat{\omega}_2 \le \tau$

здесь речь идет о совм. прибл. 2 двух чисел ξ, ξ^2

Теор 2 Если ξ такое же как в теореме 1. Тогда $\hat{\omega}_3 \le \frac{1}{2}$

Давенпорт – Шмидт 1969.

Теор 3 $\exists\ \xi$ – трансцендентное

Теор 3 ... $\hat{\omega}_2 = \hat{\omega}_2(\xi) = \dots$

также и

D. Roy 2003. (Теор 1 точна)

Упр 4 Теорема 2 точна для кубических иррациональностей.

Задача 1. Докажи упр 4.

Если $\xi \in \mathbb{R}$ и ξ – кубическая иррациональность, то $1, \xi, \xi^2, \xi^3$ линейно зависимы над $\mathbb{Q}$ и $\hat{\omega}_3(\xi) = \frac{1}{2}$

это подсказка

Теорема 5. Если ξ не алг. ирр. степени ≤ 3, то

$$\hat{\omega}_3(\xi) \le \frac{1}{2}\left(2+\sqrt{5}-\sqrt{7+2\sqrt{5}}\right) = 0.4245\ldots$$

D. Roy. 20..

Задача 2. Докажи в условиях теор. 5

$$\hat{\omega}_3 \le 0.4301\ldots$$

Теор 5 $\rightsquigarrow$ породила некоторую теорию

В задаче при $n=3$ точный ответ неизвестен.

О больших n.

$\hat{\omega}_n \lesssim \frac{2}{n}$ Давенпорт Шмидт

современные результаты $\hat{\omega}_n \le \frac{2}{n} - \dots$ главный член.

Шлейшиц, Бодягин, Поэльс – Руа.

4. ... обобщение

Чудо теорема ...

для чисел $\xi_1 \ldots \xi_n$ таких что

$$(*) \quad \xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2 = 1$$

и даёт точную оценку на $\hat{\omega}$

Клейнбок – Мощевитин } геометрическое
Поэльс – Руа, } толкование Германа.

Если $\vec{\xi}$ удовл. $(*)$ то

$\hat{\omega}(\xi) \le H_n$ – корень многочлена $x^n + x^{n-1} + \ldots + x = 1$

и эта оценка точна.

Проблема. Пусть $f(x_1, x_2) = 0$ алгебраическая кривая на $\mathbb{R}^2$

Верно ли $\exists\ \xi = (\xi_1, \xi_2)$: $f(\xi) = 0$ и $\hat{\omega}(\xi) > \frac{1}{2}$.

Существование таких ξ известно только для кривых второго порядка с рац. коэфф. (Теор 3).

$f(x_1, x_2) = 0$ $\quad$ $f(x_1,x_2)$ – многочлен ст. 2 с рац. коэфф.

Хочу рассказать сегодня:

Теор 1, 2, 3 и что-то про теор 5.

Теор 1 совместн. приб. к ξ и ξ^2 $\quad$ $n=2$

Теор Ярника: $\omega \ge \hat{\omega} \cdot \dfrac{\hat{\omega}}{1-\hat{\omega}}$

Как она доказывается.

улучшающий многочлен.

$$z_\nu = (\underbrace{x_{0\nu}}_{q_\nu}, x_{1\nu}, x_{2\nu})$$

здесь пользуемся, что ξ не квадр. иррац. $\boxed{\exists\ \delta_n \ni}$

лин. независимы.

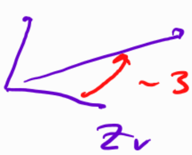
$z_{\nu-1}, z_\nu, z_{\nu+1}$ доказывается,

из некоторых определитель

что

$$\boxed{q_{\nu+1} > q_\nu^{\frac{\hat{\omega}}{1-\hat{\omega}} - \varepsilon}} \quad (1) \quad \forall \varepsilon > 0.$$

$\qquad\quad x_{0\nu+1} \qquad\qquad x_{0\nu}$



здесь 3 слагаемых сокр. результ.

Мы оценили сверху $\hat{\omega}$

$$\psi_\nu = \max(\|x_{0\nu}\xi\|, \|x_{0\nu}\xi^2\|)$$

$$\|x_{0\nu}\xi\| = |x_{0\nu}\xi - x_{1\nu}| \quad \Big\} \le x_{\nu+1}^{-\hat{\omega}+\varepsilon}$$

$\|x_{0\nu}\xi^2\| = |x_{0\nu}\xi^2 - x_{2\nu}|$

Важно. $|x_{1\nu}\xi - x_{2\nu}| \ll x_{0\nu+1}^{-\hat\omega+\varepsilon}$ $[\forall\varepsilon>0$ при д.б. $\nu]$

этот числитель является знаменателем тоже хорошего прибл. к ξ.

$$\begin{pmatrix} x_{0\nu} & x_{1\nu} \\ x_{1\nu} & x_{2\nu} \end{pmatrix}$$ – симметрическая матрица

Лемма. Если $\hat\omega > \frac{1}{2}$ то $\Delta = \begin{vmatrix} x_{0\nu} & x_{1\nu} \\ x_{1\nu} & x_{2\nu} \end{vmatrix} \neq 0.$

Доказательство леммы.

$\text{НОД}(x_{0\nu}, x_{1\nu}, x_{2\nu}) = 1$ вектор н.п. примитивен.

Д-во. от противного $x_{0\nu} \cdot x_{2\nu} = x_{1\nu}^2$

Т.е. $\exists\, m, n \in \mathbb{N}$ $x_{0\nu} = m^2$, $x_{2\nu} = n^2$, $x_{1\nu} = mn$

$|x_{0\nu}\xi - x_{1\nu}| = m|m\xi - n|$ $m = x_{0\nu}^{1/2}$

$$|m\xi - n| < \frac{x_{0\nu+1}^{-\hat\omega+\varepsilon}}{m} = x_{0\nu+1}^{-\hat\omega+\varepsilon}\, x_{0\nu}^{-1/2}$$

два соседних вектора н.п.

$$M = \begin{pmatrix} x_{0\nu-1} & x_{1\nu-1} & x_{2\nu-1} \\ x_{0\nu} & x_{1\nu} & x_{2\nu} \end{pmatrix}$$ $\text{rk}\, M = 2$

у матр. M есть ненулевой 2×2 минор

один из этих двух миноров $\neq 0$ не нули.

$\Delta_1 = \begin{vmatrix} x_{0\nu-1} & x_{1\nu-1} \\ x_{0\nu} & x_{1\nu} \end{vmatrix}$ $\Delta_2 = \dots$

Случай 1° $\Delta_1 \neq 0$ Т.ч. разобр. сл. 2° $\Delta_2 \neq 0$.

$$0 \neq \begin{vmatrix} x_{0\nu-1} & x_{1\nu-1} \\ m & n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_{0\nu-1} & x_{1\nu-1} - \xi x_{0\nu-1} \\ m & n - \xi m \end{vmatrix}$$

$$1 \leq m|x_{1\nu-1} - \xi x_{0\nu-1}| + x_{0\nu-1}|n - \xi m| \leq$$

$$\leq x_{0\nu}^{1/2 - \hat\omega + \varepsilon} + x_{0\nu-1}\, x_{0,\nu+1}^{-\hat\omega+\varepsilon}\, x_{0\nu}^{-1/2} \xrightarrow[\nu\to\infty]{} 0$$

$\hat\omega > \frac{1}{2}$ с запасом $x_{0\nu} \to \infty$

1° – не может быть.

2° — тоже не делает.
Здесь надо использовать, для $x_{1\nu}$ тоже значения приближены к ξ.

$\hat{\omega} > \frac{1}{2}$

продолжим 25 сравнение.

$$\ll \frac{x_{0\nu-1}}{x_{0\nu}^{1/2}\; x_{0\nu+1}^{\hat{\omega}-\varepsilon}} \ll x_{0\nu-1}^{\,\dots}$$

$x_{0\nu-1} < x_{0\nu} < x_{0\nu+1}$

Следствие: $\boxed{x_{0\nu} \gg x_{0\,\nu+1}^{\hat{\omega}-\varepsilon}}$ (2)

$$1 \le \left|\begin{matrix} x_{0\nu} & x_{1\nu} \\ x_{1\nu} & x_{2\nu} \end{matrix}\right| = \left|\begin{matrix} x_{0\nu} & x_{1\nu} - \xi x_{0\nu} \\ x_{1\nu} & x_{2\nu} - \xi x_{1\nu} \end{matrix}\right| \ll$$

$$\ll x_{0\nu}\; x_{0,\nu+1}^{-\hat{\omega}+\varepsilon}$$

$x_{1\nu} = x_{0\nu}\xi + \dots$

$x_{1\nu} \ll x_{0\nu}$

(1) и (2) дает теорему.

(1) $\quad x_{0\nu+1} \gg x_{0\nu}^{\frac{\hat{\omega}}{1-\hat{\omega}}+\varepsilon}$

$$x_{0\nu} \gg x_{0\nu}^{\frac{\hat{\omega}^2}{1-\hat{\omega}}+\varepsilon}$$

$$\frac{\hat{\omega}^2}{1-\hat{\omega}} + \varepsilon \le 1 \quad \forall \varepsilon$$

$$\hat{\omega}^2 \le 1 - \hat{\omega}$$

$\hat{\omega} \leq \iota$

Теорема док.

Теорема 3 $\exists \xi: \quad \hat{\omega}_2(\xi) = \tau.$

$a \neq b$ натур числа.

$\xi = [0; a, b, a, a, b, a \ldots]$

послед. неподвижн отн замен $a \mapsto ab$, $b \mapsto a$

(слово Фибоначчи)

Слова: $w_0 = b, \quad w_1 = a, \quad w_i = w_{i-1} w_{i-2}.$

w_{i+2} – удалим у этого слова две последние буквы, получится слово m_i

$W_{i+2} = m_i\, **$

Утв m_i это палиндром,

$m_1 = a \qquad m_2 = aba$

$w_2 = ab \qquad w_4 = aba\boxed{ab}$

$w_3 = a\boxed{ba} \qquad w_5 = abaab\,a\boxed{ba}$

$m_3 = abaaba$

Надо доказ

$m_r = m_r^*$

$** = \begin{cases} ab & \text{четное} \\ ba & \text{нечетное} \end{cases}$

$w_{i-1} = m_{i-1}\, **$

$w_{i-2} = m_{i-2}\, **$

$W_i = \boxed{\underbrace{m_{i-1}\, **\, m_{i-2}}_{m_i}}\, **$

$ab \mapsto aba$

$ba \mapsto aba$

$m_{i-1} = m_{i-2}\, **\, m_{i-3}$

$m_i = \underbrace{m_{i-2}}\ \overset{\text{редние}}{xx\ m_{i-2}}\ xx\ \underbrace{m_{i-2}}$

середин

$a_0 = 1$

$a_i \in \{a, b\}$

$q_1 q_2 + 1$

q_2

$q_1 = a_1$ $q_0 = 1$

$p_1 = 1$ $p_0 = 0$

$$\begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} a_{v_i} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{q_{v_i}} & q_{v-1_i} \\ p_{v_i} & p_{v-1_i} \end{pmatrix} = W_i$$

$\frac{1}{q_2 + \frac{1}{q_2}} = \frac{q_2}{q_1 q_2 + 1}$

$\frac{p_v}{q_v} = [0; a_1, \dots, a_v]$

$m_i = (a_1 \dots a_{v_i})$ $v = v_i$

$W_i^T = W_i$

т.к. m_v палиндром,

$\lambda = \lambda_i$

$p_v = q_{v-1}$

Она это ✓

$q_v = x_{0i}$ $p_v = x_{1i}$, $p_{v-1} = x_{2i}$

$$(*) \begin{cases} |x_{0i}\tau - x_{1i}| \ll x_{0i}^{-1} \\ |x_{1i}\tau - x_{2i}| \ll x_{0i}^{-1} \\ |x_{0i}\tau^2 - x_{2i}| \ll x_{0i}^{-1} \end{cases}$$

$\tau = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

$1+\tau$

Ясно $x_{0i+1} \asymp x_{0i}$

m_1 m_1 -1 m_v

$$\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$W_i = \underbrace{W_{i-1} \quad W_{i-2}}$$

$\psi(t) = \underline{\min_{x \leq t} \max_{j=1,2} \| x\xi^j \|}$

$\tau = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

τ

$\frac{1}{1+\tau}$

$t_i = x_{0i}$

$$\psi(t_i) \ll t_{\boxed{i}} \ll t_{i+1}$$

$$t_{i+1} \asymp t_i^{1+\widetilde{\varepsilon}}$$

<u>Задача</u> Докажем доверительно