Спецкурс "Диофантовы приближения. Листок 7.
Суммы квадратов и рациональные приближения на сферах.

Рассмотрим квадратичную форму

$$f(\mathbf{w}) = f(z, y, x_1, x_2) = zy - x_1^2 - x_2^2.$$

и четырехмерные тела

$$\mathfrak{P} = \left\{\mathbf{w} = (z, y, x_1, x_2) \in \mathbb{R}^4 : \ |f(\mathbf{w})| < 1\right\}$$

и

$$\mathfrak{K} = \left\{\mathbf{w} = (z, y, x_1, x_2) \in \mathbb{R}^4 : \ |z + y| < 2, \, |z - y| < 2\sqrt{1 - {x_1}^2 - {x_2}^2}\right\} =$$
$$= \left\{\mathbf{w} = (z, y, x_1, x_2) \in \mathbb{R}^4 : \ |\xi| < 1, \, \eta^2 + {x_1}^2 + x_2^2 < 1\right\},$$

где

$$\begin{cases} z = \xi + \eta, \\ y = \xi - \eta. \end{cases}$$

1. a) Доказать,что $\mathfrak{K}$, центрально симметрично и $\operatorname{vol} \mathfrak{K} > 16$.
b) Доказать, что $\mathfrak{K} \subset \mathfrak{P}$.
c) Рассмотрим линейные преобразования, задающиеся матрицами

$$G_t = \begin{pmatrix} t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R_\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \beta_1^2 + \beta_2^2 & 1 & -2\beta_1 & -2\beta_2 \\ -\beta_1 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta_2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Чему равны определители этих матриц?
d) Доказать, что преобразования из предыдущего пункта являются автоморфизмами формы f то есть

$$f(G_t \mathbf{w}) = f(R_\beta \mathbf{w}) = f(\mathbf{w})$$

для всех $t \in \mathbb{R}_+, \alpha \in \mathbb{R}^2, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^4$.
e) Доказать, что для тел $\mathfrak{K}_\beta^t = R_\beta^{-1} G_t \mathfrak{K}$ выполнено $\mathfrak{K}_\beta^t \subset \mathfrak{P}$, при каждом $t \in \mathbb{R}_+, \beta \in \mathbb{R}^2$. Будут ли эти тела выпуклыми и цетрально симметричными? Чему равны объемы этих тел?
2. Пусть хотя бы одно из чисел β_1 или β_2 иррационально.
a) Доказать, что существует бесконечно много рациональных векторов $\left(\frac{b_1}{q}, \frac{b_2}{q}\right)$ таких что

$$\sum_{i=1}^{2} (q\beta_i - b_i)^2 < 1 \tag{1}$$

и

$$b_1^2 + b_2^2 \equiv 0 \pmod q.$$

b) Можно ли заменить в правой части (1) единицу $\sqrt{3/\pi}$?
3*. В условии предыдущей задачи доказать, что существует бесконечно много натуральных q таких что

$$q \mid [q\beta_1]^2 + [q\beta_2]^2.$$

4. Рассмотрим сферу

$$\mathfrak{S}^n = \{\mathbf{x} = (x_1, ..., x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : \ x_1^2 + ... + x_{n+1}^2 = 1\}$$

и функции $\mathbf{t} = (t_1, ..., t_n) \in \mathbb{R}^n$, заданные формулами

$$f_j(\mathbf{t}) = \frac{2t_j}{1 + t_1^2 + ... + t_n^2},\ j = 1, ..., n, \quad f_{n+1}(\mathbf{t}) = \frac{1 - t_1^2 - ... - t_n^2}{1 + t_1^2 + ... + t_n^2}.$$

Доказать, что если

$$\mathbf{x} = \left(\frac{A_1}{Q}, ..., \frac{A_{n+1}}{Q}\right),\ A_1, ..., A_{n+1}, Q \in \mathbb{Z},\ (Q, A_1, ..., A_{n+1}) = 1$$

это рациональная точка на сфере $\mathfrak{S}^n$, то она обязательно имеет вид

$$\frac{A_j}{Q} = f_j(\mathbf{t}) = \frac{2b_j q}{q^2 + b_1^2 + ... + b_n^2},\ j = 1, ..., n, \quad \frac{A_{n+1}}{Q} = f_{n+1}(\mathbf{t}) = \frac{q^2 - b_1^2 - ... - b_n^2}{q^2 + b_1^2 + ... + b_n^2},$$

где

$$\mathbf{t} = \left(\frac{b_1}{q}, ..., \frac{b_n}{q}\right), \quad q \in \mathbb{Z}_+, b_1, ..., b_n \in \mathbb{Z}, \quad (q, b_1, ..., b_n) = 1.$$

(Возможно, следует для начала ограничиться случаем $n = 2$.)

5. Доказать, что если $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathfrak{S}^1 \setminus \mathbb{Q}^2$, то для $\varepsilon > 0$ найдется бесконечно много рациональных векторов$\left(\frac{A_1}{Q}, \frac{A_2}{Q}\right) \in \mathfrak{S}^1 \cap \mathbb{Q}^2$, таких что

$$\sqrt{\sum_{i=1,2} \left(\alpha_i - \frac{A_i}{Q}\right)^2} < \frac{1+\varepsilon}{\sqrt{2}Q}. \tag{2}$$

6. Доказать, что в неравенстве (2) постоянная $\sqrt{2}$ неулучшаема. (Что это означает?)

7. Доказать, что если цепная дробь для числа β не имеет хвоста из всех 2, то в неравенстве (2) вместо $\sqrt{2}$ можно поставить меньшую постоянную. Какую?

8. Пусть $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathfrak{S}^2 \setminus \mathbb{Q}^3$. Доказать, что существует бесконечно много $\left(\frac{A_1}{Q}, \frac{A_2}{Q}, \frac{A_3}{Q}\right) \in \mathfrak{S}^2 \cap \mathbb{Q}^3$, таких что

$$\sqrt{\sum_{i=1,2,3} \left(\alpha_i - \frac{A_i}{Q}\right)^2} < \frac{2}{Q}. \tag{3}$$

9. Вычислить точную постоянную в правой части неравенства (3).