Листок 3.

Дифференцируемая функция F на интервале (a, b) называется первообразной или неопределенным интегралом функции f, если $F' = f$. Далее обозначаем $F = \int f(x)\,dx$. Ясно, что функция F определена с точностью до добавления константы.

Задача 1. Раскладывая на простейшие дроби укажите алгоритм интегрирования произвольной рациональной функции. Найдите $\int \frac{1}{1+x^4}\,dx$.

Задача 2. При каких значениях параметров a, b, c интеграл

$$\int \frac{ax^2+bx+c}{x^3(x-1)^2}\,dx$$

является рациональной функцией?

Задача 3. Найдите все такие непрерывные функции F, что F дифференцируема всюду кроме не более чем счетного множества точек и $F' = f$, где

$$(a)\, f(x) = (-1)^{[x]}, \quad (b)\, f(x) = \frac{1}{(\sin^2 x + 2\cos^2 x)^2}, \quad (c)\, f(x) = \frac{x^2}{(x\sin x + \cos x)^2},\ x \in (0, \pi/2).$$

Задача 4.

(a) Пусть $G = \int g(y)\,dy$ и $F = \int f(x)\,dx$ на (a, b). Докажите, что дифференцируемая функция $y(x)$ удовлетворяет уравнению $g(y)y' = f(x)$ на интервале (a, b) тогда и только тогда, когда верно равенство $G(y(x)) = F(x) + C$ для всех $x \in (a, b)$ и некоторого C. Решите уравнение $y' = \lambda y$.

(b) (Остывание чайника) Исходя из того, что скорость остывания чайника пропорциональна разности его температуры и температуры воздуха, выведите зависимость температуры чайника от времени и оцените время его остывания до комнатной температуры.

(c) (Водяные часы) Известно, что скорость истечения воды из небольшого отверстия на дне сосуда достаточно точно может быть вычислена по формуле $0,6\sqrt{2gH}$, где g – ускорение силы тяжести, а H – высота уровня воды над отверстием. Какую форму должен иметь сосуд, являющийся телом вращения, чтобы при стечении из него воды уровень воды понижался равномерно?

Задача 5. Найдите:

(a) $\int_{1/10}^{10} \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx$,

(b) $\int_0^1 \frac{f(x)}{f(x)+f(1-x)}\,dx$, где f – непрерывна на $[0, 1]$ и $f > 0$,

(c) $\int_{-1}^1 f(x)\,dx$, где f – непрерывна на $[-1, 1]$ и $pf(x) + qf(-x) = 1$, $p + q \neq 0$.

Задача 6.

(a) Пусть ψ – выпуклая функция на $\mathbb{R}$, f – непрерывная функция и $f \geq 0$. Докажите неравенство Йенсена: $\psi\Big(\int_0^1 f(x)\,dx\Big) \leq \int_0^1 \psi(f(x))\,dx$.

(b) Пусть $f > 0$ – непрерывная функция. Найдите $\lim\limits_{p\to+\infty} \left(\int_0^1 f^p\,dx\right)^{1/p}$.

Задача 7. Пусть $f : [1; +\infty) \to (0; +\infty)$ — монотонно убывающая непрерывная функция. Докажите, что ряд $\sum_n f(n)$ сходится тогда и только тогда, когда существует $\lim_{M\to\infty} \int_1^M f(x)dx$. Исследуйте сходимость ряда $\sum_n \frac{1}{n^p \ln^q n}$.

Если существует предел $\lim_{M\to\infty} \int_a^M f(x)dx$, то говорят, что f интегрируема на $[a, +\infty)$ в несобственном смысле и значение предела обозначают через $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$.

Задача 8.(Эйлер) Предположим, что функция f непрерывно дифференцируема на $[1,+\infty)$. Тогда верно равенство

$$\sum_{n=M}^{N} f(n) = f(M) + \int_M^N f(x)\,dx + \int_M^N \{x\}f'(x)\,dx,$$

где $\{x\}$ – дробная часть числа x.

Задача 9.

(a) Обоснуйте сходимость ряда $\sum_n \frac{\cos\sqrt{n}}{n}$.

(b) Докажите, что для некоторой константы $C>0$ справедливо равенство

$$1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n} = \ln n + C + \varepsilon_n, \quad \lim_{n\to\infty}\varepsilon_n = 0.$$

(c) Рассматривая сумму $\sum_{k=1}^{n}\ln k$, докажите, что для некоторой константы $C>0$ справедливо равенство

$$n! = Cn^{n+\frac{1}{2}}e^{-n+\varepsilon_n}, \quad \lim_{n\to\infty}\varepsilon_n = 0.$$

Задача 10. Пусть f – дважды непрерывно дифференцируема на $[0,+\infty)$, причем $|f|^2$ и $|f''|^2$ интегрируемы на $[0,+\infty)$. Докажите, что $|f'|^2$ интегрируема на $[0,+\infty)$.

Заметим, что dx_k (дифференциал функции $f(x)=x_k$) является линейной функцией на $\mathbb{R}^n$, причем всякая линейная функция L может быть записана в виде

$$L = a_1dx_1 + a_2dx_2 + \ldots + a_ndx_n.$$

Если задано отображение $\omega\colon x\mapsto L_x$, сопоставляющее каждой точке открытого множества U линейную функцию L_x, то говорят, что на U дифференциальная 1–форма ω. Далее пишем $\omega(x) = a_1(x)dx_1+\ldots+a_n(x)dx_n$. Типичный пример 1-формы – дифференциал функции f. Форму ω можно проинтегрировать по гладкому пути $\gamma\colon[0,1]\mapsto U$ следующим образом:

$$\int_\gamma \omega = \int_0^1 a_1(\gamma(t))\dot{x}_1(t)+\ldots+a_n(\gamma(t))\dot{x}_n(t)\,dt.$$

Кривую можно параметризовать различными способами. Непрерывно дифференцируемая функция $t(\tau)$, отображающая $[0,1]$ на $[0,1]$, называется допустимой заменой параметра, если $t'\neq 0$.

Задача 11. Докажите, что модуль выражения $\int_\gamma\omega$ не зависит от допустимой замены параметра $t(\tau)$, а знак меняется или не меняется в зависимости от отрицательности или положительности функции t'.

Задача 12. Докажите, что $\displaystyle\int_\gamma df = f(\gamma(1)) - f(\gamma(0))$.

Задача 13. Пусть γ – гладкая замкнутая ($\gamma(0)=\gamma(1)$) кривая на плоскости, не проходящая через $(0,0)$. Докажите, что выражение

$$\frac{1}{2\pi}\int_\gamma \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$$

равно целому числу. Найдите это число для случая, когда $\gamma(t) = (\cos nt, \sin nt)$. Каков геометрический смысл этого целого числа?

Указание: вычислите $d\Big(\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\Big)$.

Если форма является дифференциалом некоторой функции, то говорят, что эта форма точная. Из задачи 13 видно, что не всякая 1-форма является точной.

Задача 14. Пусть $a_k(x)$ – непрерывно дифференцируемые функции на $\mathbb{R}^n$. Предположим, что $\frac{\partial a_k}{\partial x_i} = \frac{\partial a_i}{\partial x_k}$. Докажите, что форма $a_1dx_1+\ldots+a_ndx_n$ является дифференциалом некоторой функции f.

Указание: $\displaystyle f(x) = \int_0^1 x_1a_1(tx)+\ldots+x_na_n(tx)\,dt$.