НМУ, Алгебра-2
Листок 8. 17.04.2023

Задача 1.
Пусть F — поле характеристики $p > 0$, $m \geq 2$, K — циклическое расширение F степени p^{m-1}, σ — порождающий элемент группы Галуа.

а) Докажите, что если $\beta \in K$ и $\operatorname{Tr} \beta = 1$, то существует $\alpha \in K$ такое, что $\sigma\alpha - \alpha = \beta^p - \beta$ и для такого α многочлен $x^p - x - \alpha$ неприводим над $K[x]$.

б Пусть γ — корень многочлена $x^p - x - \alpha$, $L = K(\gamma)$. Докажите, что L/F — циклическое расширение Галуа степени p^m.

Задача 2.
Сколько различных квадратичных расширений есть у поля $\mathbb{Q}_2$?
Задача 3.
Пусть $K_n = \frac{2^1}{1} + \ldots + \frac{2^n}{n}$. Докажите, что при $n \to +\infty$ выполнено $|K_n|_2 \to 0$.
Задача 4.

а) Пусть p — нечётное простое число, $m \geq 1$. Докажите, что многочлен $x^{p^m} - a$ приводим над полем K тогда и только тогда, когда $a = b^p$ для некоторого $b \in K$.

б) Докажите, что если характеристика поля K равна 2, то это верно и для $p = 2$.

Задача 5.
Пусть F — поле, C — его алгебраическое замыкание и $1 < [C : F] < \infty$.

а) Докажите, что F совершенно (т.е. либо характеристика F равна 0, либо $p > 0$ и при этом отображение $x \mapsto x^p$ сюръективно) и заключите, что C/F — расширение Галуа.

б) Пусть $[C : F] = p$ — нечётное простое число и $\operatorname{char} F = p$. Пусть $C = F(\alpha)$, где $\alpha^p - \alpha - a = 0$. Представьте решение уравнения $b^p - b = a\alpha^{p-1}$ в виде $b_0 + b_1\alpha + \ldots + b_{p-1}\alpha^{p-1}$, $b_i \in F$ и покажите, что $b_{p-1}^p - b_{p-1} - a = 0$.

в) Пусть $[C : F] = p$ — простое число и $\operatorname{char} F \neq p$. Покажите, что F содержит примитивный корень степени p из единицы и заключите, что $C = F(\sqrt[p]{\gamma})$ для некоторого $\gamma \in F$.

Задача 6.
В условиях задачи 5в, пусть $\beta^p = \gamma$, $C = F(\beta)$. Рассмотрим $\alpha \in C$ такое, что $\alpha^p = \beta$. Пусть σ — образующая группы Галуа C/F.

а) Докажите, что $\sigma\alpha = \omega\alpha$, где ω — примитивный корень степени p^2 из 1.

б) Докажите, что $\sigma\omega = \omega^{1+pk}$ для некоторого k.

в) Выведите, что $p = 2$, из равенства $\sigma^p(\alpha) = \alpha$. Для $p = 2$ покажите, что -1 в F не является квадратом.

Задача 7.
Пользуясь предыдущей задачей, покажите, что если C/F — нетривиальное конечное расширение и C алгебраически замкнуто, то $\operatorname{char} F = 0$ и $C = F(\sqrt{-1})$.
Задача 8.
Докажите, что правильные $5-, 17-$ и $257-$угольники можно построить циркулем и линейкой.