НМУ, Алгебра-2
Листок 2. 27.02.2023

Задача 1.
Пусть K — бесконечное поле. Докажите, что $\overline{K}$ равномощно K.

Задача 2.
Пусть $n_1, \ldots, n_m$ — целые числа. Докажите, что поле $\mathbb{Q}(\sqrt{n_1}, \sqrt{n_2}, \ldots, \sqrt{n_m})$ не содержит $\sqrt[3]{2}$.

Задача 3.
Пусть p — простое число и многочлен $x^3 - x - a$ неприводим над $\mathbb{F}_p$. Докажите, что $4 - 27a^2$ — квадрат в $\mathbb{F}_p$.
Указание: Пусть $x^3 - x - a = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$. Найдите $(3\alpha^2-1)(3\beta^2-1)(3\gamma^2-1)$.

Задача 4.
Существует ли неприводимый над $\mathbb{Q}$ многочлен, который приводим над $\mathbb{F}_p$ для всех p?

Задача 5.
Докажите, что ряд

$$1 + x + 2x^2 + 6x^3 + 24x^4 + \ldots + n!x^n + \ldots \in \mathbb{C}((x))$$

не алгебраичен над $\mathbb{C}(x)$.

Задача 6.
Найдите все $n \in \mathbb{Z}$, для которых многочлен $x^3 - nx + 6$ приводим над $\mathbb{Q}$.

Задача 7.
Поле F называется формально вещественным, если не существует $n \geq 1$ и элементов $f_1, \ldots, f_n \in F$ таких, что

$$f_1^2 + f_2^2 + \ldots + f_n^2 = -1.$$

Докажите, что любое расширение F нечётной степени также формально вещественно.
Указание: Предположите противное и рассмотрите многочлен $f(x)$ наименьшей нечетной степени такой, что $F[x]/(f(x))$ не является формально вещественным.