Топология подмножеств пространства $\mathbb{R}^n$

1. Докажите следующие утверждения:
   a) полуинтервал гомеоморфен лучу;
   b) интервал гомеоморфен прямой;
   c) прямая и луч не гомеоморфны;
   d) окружность и отрезок не гомеоморфны;
   e) пространства из пункта *c*) и пространства из пункта *d*) попарно не гомеоморфны.

2. Постройте непрерывную биекцию из полуинтервала на окружность.

3. Докажите следующие утверждения:
   a) открытый диск гомеоморфен плоскости;
   b) двумерная сфера с выколотой точкой гомеоморфна плоскости;
   c) плоскость с выколотой точкой гомеоморфна цилиндру $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$;
   d)* плоскость, плоскость с выколотой точкой, замкнутый диск и двумерная сфера попарно не гомеоморфны.

4. Докажите, что пространства из задачи 1 и пространства из задачи 3 попарно не гомеоморфны.

5. Докажите, что n-мерный симплекс

$$\Delta^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} | x_1 + x_2 + \dots x_{n+1} = 1 \ ; \ x_i \geq 0\}$$

   и n-мерный диск

$$\mathbb{D}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n | x_1^2 + x_2^2 + \dots x_n^2 \leq 1\}$$

   гомеоморфны, при
   a) $n = 1$;
   b) $n = 2$;
   c) произвольном n.

6. Города A и B соединены двумя дорогами. Два путешественника могут пройти по этим дорогам из A в B таким образом, что расстояние между ними в любой момент не превосходит 1 км. Может ли один

путешественник пройти из A в B, а другой из B в A (по этим дорогам) таким образом, чтобы расстояние между ними в любой момент было больше чем 1 км?

7. Докажите, что если непрерывное отображение $f\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^2$ является биекцией на свой образ (то есть $f\big(\mathbb{S}^1\big)$ есть замкнутая несамопересекающаяся непрерывная кривая), то отображение f осуществляет гомеоморфизм на свой образ (кривая $f\big(\mathbb{S}^1\big)$ гомеоморфна S^1).

8. Пусть $K_1 \subset \mathbb{R}^{n_1}, K_2 \subset \mathbb{R}^{n_2} \dots K_s \subset \mathbb{R}^{n_s}$ — компактные подмножества. Докажите, что подмножество
$$K_1 \times K_2 \times \dots \times K_s \subset \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \times \dots \times \mathbb{R}^{n_s} = \mathbb{R}^{n_1+n_2+\dots+n_s}$$
компактно.