НМУ, I курс, 02.05.2022

Листок 4.

Задача 1. Докажите, что последовательность функций $\sin nx$ не имеет подпоследовательности, сходящейся почти всюду на $[0,1]$.

Задача 2. Пусть K — компакт в $[0,1]$ положительной меры Лебега, не имеющий внутренних точек. Доказать, что его индикатор не является интегрируемым по Риману.

Задача 3. a) Докажите, что для всякой борелевской функции f на $[0,1]$ найдется последовательность непрерывных функций f_n, для которых $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ для почти всех $x \in [0,1]$. b) Привести пример такой ограниченной борелевской функции на $[0,1]$, что всякая функция, совпадающая с ней почти всюду, всюду разрывна.

Задача 4. Пусть измеримые функции f_n почти всюду сходятся к функции f на отрезке $[0,1]$ с мерой Лебега. Докажите, что

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x) e^{-f_n^2(x)}\, dx = \int_0^1 f(x) e^{-f^2(x)}\, dx.$$

Задача 5. Докажите, что сходимость почти всюду на множестве многочленов на $[0,1]$ не задается топологией (т. е. нет такой топологии на пространстве многочленов, что сходящиеся в ней последовательности — в точности последовательности, сходящиеся почти всюду).

Задача 6. Доказать равенство

$$\int_X |f|^p \, d\mu = p \int t^{p-1} \mu(x\colon\ |f(x)| > t)\, dt.$$

Задача 7. Найдите объем единичного шара в $\mathbb{R}^n$.

Задача 8. Найдите объем пересечения внутренностей двух цилиндров $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + z^2 = 1$ в $\mathbb{R}^3$.

Задача 9. Найдите объем тела, полученного вращением куба в $\mathbb{R}^3$ вокруг диагонали.

Задача 10. Пусть $I = [0,1]^n$. Найдите

$$\int_I \min\{x_1, \ldots, x_n\}\, dx, \quad \int_I \max\{x_1, \ldots, x_n\}\, dx.$$