Классы Штифеля-Уитни

Задача 8.1. Пусть ξ — вещественное векторное расслоение ранга n.
а) С помощью теоремы Лере-Хирша покажите, что $H^*(\mathbb{P}(\xi);\mathbb{F}_2)$ — свободный $H^*(B(\xi);\mathbb{F}_2)$ модуль с образующими $1, t, \dots, t^{n-1}$, где $t \in H^1(\mathbb{P}(\xi);\mathbb{F}_2)$ класс ограничивающийся в образующую первых когомологий любого слоя $H^1(\mathbb{P}(\xi)_x;\mathbb{F}_2) = H^1(\mathbb{R}P^{n-1};\mathbb{F}_2)$.

Элемент t^n единственным образом выражается через $1, t, \dots, t^{n-1}$ с коэффициентами в $H^*(B(\xi);\mathbb{F}_2)$:

$$t^n + w_1(\xi)t^{n-1} + \dots + w_n(\xi) = 0.$$

Определение. Класс $w_i(\xi) \in H^i(B(\xi);\mathbb{F}_2)$ называется *i-ым классом Штифеля-Уитни* векторного расслоения ξ.

б) Покажите, что для тавтологического расслоения γ_n^1 класс $w_1(\gamma_n^1)$ является образующей $H^1(\mathbb{R}P^n;\mathbb{F}_2)$.

в) Докажите, что соответствие $\xi \mapsto w_i(\xi)$ функториально, т.е. $w_i(f^*\xi) = f^*w_i(\xi)$.

г) Покажите, что для классов w_i выполняется формула Картана:

$$w_n(\xi \oplus \eta) = \sum_{i+j=n} w_i(\xi)w_j(\eta).$$

Классы Черна

Задача 8.2. Покажите, что комплексное линейное расслоение ξ тривиально тогда и только тогда, когда $c_1(\xi) = 0$.

Задача 8.3. Пусть ξ — комплексное векторное расслоение ранга n.
а) Покажите, что $c_k(\xi^*) = (-1)^k c_k(\xi)$.
б) Докажите, что $c_1(\Lambda^n\xi) = c_1(\xi)$.

Задача 8.4. Пусть ξ — комплексное векторное расслоение ранга 3. Выразите классы Черна расслоений $\Lambda^2\xi$, $S^3\xi$ через классы Черна ξ.

Замечание. Для расслоений ξ и η классы Черна всевозможных тензорных произведений можно выразить через классы Черна исходных расслоений. Тем не менее, никаких замкнутых формул для этого нет, и каждый раз это некоторое вычисление, которое можно проделать за конечное время.

Проективное пространство

Задача 8.5. а) Покажите, что имеет место изоморфизм комплексных векторных расслоений

$$\tau_{\mathbb{C}P^n} \cong \mathrm{Hom}(\gamma_{\mathrm{n}}^1, (\gamma_{\mathrm{n}}^1)^\perp).$$

б) Вычислите полный класс Черна $c(\mathbb{C}P^n)$.

Задача 8.6. Опишите пространство голоморфных сечений расслоения $\mathcal{O}(d) \stackrel{\text{def}}{=} (\gamma^{1*})^d$ над $\mathbb{C}P^n$.

Задача 8.7. а) Пусть $H \subseteq \mathbb{C}P^n$ — гладкая гиперповерхность степени d. Покажите, что нормальное расслоение $\nu_{H/\mathbb{C}P^n}$ изоморфно $\mathcal{O}(d)|_H$.
б) Вычислите полный класс Черна $c(H)$.