Листок 3
ВВЕДЕНИЕ В ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ II

1. Рассмотрим задачу о предписанной кривизне на двумерной сфере:

$$\Delta_{g_0} u + 1 - K_g e^{2u} = 0, \ (1)$$

т.е. ищем метрику $g \in [g_0]$ такую, что её гауссова кривизна совпадает с наперёд заданной функцией $K_g \in C^\infty(\mathbb{S}^2)$. Здесь g_0 – стандартная метрика на сфере гауссовой кривизны 1.

(а) Докажите, что первое собственное число оператора Лапласа на $(\mathbb{S}^2, g_0)$ равно 2.

(б) Пусть φ – первая собственная функция на $(\mathbb{S}^2, g_0)$, т.е. $\Delta_{g_0}\varphi = 2\varphi$ и $u \in C^\infty(\mathbb{S}^2)$ – решение задачи (1). Докажите, что:

$$\int_{\mathbb{S}^2} \langle \nabla_{g_0} u, \nabla_{g_0} \varphi \rangle_{g_0} \Delta_{g_0} u dv_{g_0} = 0,$$

$$\int_{\mathbb{S}^2} \langle \nabla_{g_0} u, \nabla_{g_0} \varphi \rangle_{g_0} dv_{g_0} = \int_{\mathbb{S}^2} \varphi K_g e^{2u} dv_{g_0},$$

$$\int_{\mathbb{S}^2} \langle \nabla_{g_0} u, \nabla_{g_0} \varphi \rangle_{g_0} K_g e^{2u} dv_{g_0} = -\frac{1}{2} \int_{\mathbb{S}^2} \langle \nabla_{g_0} K_g, \nabla_{g_0} \varphi \rangle_{g_0} e^{2u} dv_{g_0} + \int_{\mathbb{S}^2} \varphi K_g e^{2u} dv_{g_0}.$$

(в) Докажите, что

$$\int_{\mathbb{S}^2} \langle \nabla_{g_0} K_g, \nabla_{g_0} \varphi \rangle_{g_0} e^{2u} dv_{g_0} = 0.$$

Полученная формула называется *препятствием Каждана-Уорнера.*

(г) Выведите из (в), что для функции $K_g = 1 + \varepsilon\varphi$ задача о предписанной кривизне не имеет решения на сфере для малых $\varepsilon > 0$, несмотря на то, что $K_g > 0$.

2. Вывести неравенство Мозера-Трюдингера:

$$\int_\Sigma e^u dv_g \leqslant Cexp\left(\eta ||\nabla_g u||^2_{L^2(M, dv_g)} + \frac{1}{Area(\Sigma, g)} \int_\Sigma u dv_g\right)$$

из неравенства Трюдингера. Здесь (Σ, g) - замкнутая поверхность, $u \in H^1(\Sigma, dv_g)$, C, η – константы, зависящие лишь от метрики g и топологии Σ.

3. Доказать, что критические функции отношения Ямабе

$$Q[u] = \frac{\int_M (|\nabla_g u|^2_g + c_n S_g u^2) dv_g}{||u||^2_{L^p(M, dv_g)}}$$

удовлетворяют уравнению Ямабе

$$\Box_g u = \lambda u^{p-1}.$$

Здесь $c_n = \frac{n-2}{4(n-1)}, n = \dim M \geqslant 3, p = \frac{2n}{n-2}, \lambda = const, (M, g)$ замкнуто.

4. Дано (M, g) замкнутое, $\dim M = 3, 4, 5$ и $S_g > 0$. Пусть G_p – функция Грина оператора Ямабе $\Box_g$, т.е. $\Box_g G_p = \delta_p, p \in M$. Пусть $G = (n-2)\omega_{n-1} G_p$, где ω_{n-1} – объём стандартной $n-1$ сферы. Напомним, что в нормальных конформных координатах центрированных в p G имеет следующую асимптотику:

$$G = r^{n-2} + A + \alpha(x),$$

где $A = const$ и $\alpha = O(r) \in C^{2,\mu}(M)$. Рассмотрим $\tilde{g} = G^{\frac{4}{n-2}} g$. Докажите, что $(M \setminus \{p\}, \tilde{g})$ является асимптотически плоским.