Комплексный анализ, краткий конспект 2021

1. Первая лекция

1.1. Комплексные числа. Мы будем оперировать с комплексными числами, которые легко определить, как множество всех упорядоченных пар вещественных чисел на котором введены операции сложения:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

и умножения

$$(a, b)(c, d) = (ac - bd, bc + ad).$$

Хорошо известно (и это задача), что эти две операции порождают структуру поля комплексных чисел $\mathbb{C}$. Чуть сложнее проверить существование обратного элемента. Комплексное число $(0, 1)$ записывают как i, вещественные числа вкладывают в комплексные стандартным образом $a \mapsto (a, 0)$ и отождествляют их со своими образами. Легко проверить, что

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (b, 0)(0, 1) = a + bi.$$

Число a называется *вещественной частью* числа $z = a+bi$ и обозначается $\operatorname{Re} z$, а число b называется *мнимой частью* z и обозначается $\operatorname{Im} z$.

1.2. Модуль и аргумент комплексного числа. Модуль комплексного числа $z = a + bi$ это величина

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Некоторые примеры задач, в которых язык комплексных чисел может помочь.

Теорема Понселе, шарики, теорема Наполеона

Модуль, аргумент

Непрерывность, топология

Экспонента и тригонометрические функции.

Основная теорема алгебры.

2. Лекция вторая.

2.1. Радиус сходимости. Рассмотрим степенной ряд с центром в нуле

$$\sum_{n\geq 0} a_n x^n.$$

Лемма 2.1. Пусть все члены ряда ограничены при $x = x_0$. Тогда при всех $|x| < |x_0|$ ряд сходится абсолютно.

Построим ряд $\sum \alpha_n r^n$, где $\alpha_n = |a_n|$. Тогда этот ряд сходится при $r < r_0$, расходится при $r > r_0$(это определение числа r_0, оно может быть нулем или бесконечностью). Оказывается исходный ряд равномерно сходится при

$$|x| \leq r < r_0.$$

В самом деле, остаток оценивается остатком геометрической прогрессии. И расходится при $|x| > r_0$ – поскольку его общий член не может быть ограничен.

Задача 1. Докажите, что
$$\frac{1}{r_0} = \overline{\lim_{n\to\infty}} |a_n|^{1/n}.$$

2.2. Производная. Производная степенного ряда: составим формально ряд $\sum n a_n z^{n-1}$. Во-первых, его радиус сходимости не больше радиуса сходимости исходного ряда ибо если на r ассоциированный ряд домножить, то он почленно больше ассоциированного к исходному. Во-вторых, легко показать, что он сходится при всех $r < r_0$:

$\alpha_n r_1^n < M$ при $r < r_1 < r_0$

$$n\alpha_n r^{n-1} = n\alpha_n r_1^n (r/r_1)^n 1/r \leq nM/r(r/r_1)^n,$$
а последний ряд сходится.

Докажем теперь, что этот ряд $\sum n a_n z^{n-1}$ есть настоящая производная исходного ряда в круге сходимости:

$$S'(z) = \lim_{h\to 0} \frac{S(z+h) - S(z)}{h}.$$

Действительно:
$$\frac{S(z+h) - S(z)}{h} - S'(z) = \sum_{n\geq 1} u_n(z,h),$$
где
$$u_n(z,h) = a_n((z+h)^{n-1} + z(z+h)^{n-2} + \ldots + z^{n-1} - nz^{n-1}).$$
Откуда
$$|u_n(z,h)| \leq 2n\alpha_n r^{n-1},$$
где $|z|, |z+h| < r$. Ряд $\sum 2n\alpha_n r^{n-1}$ положителен и сходится – его остаток мал, а первые члены многочлены и стремятся к нулю.

Отметим, что если радиус сходимости ряда $f(z) = \sum a_n z^n$ больше нуля, то функция f бесконечно дифференцируема в открытом круге и
$$f^{(n)}(0) = n! a_n,$$
так что она совпадает со своим рядом Тейлора.

2.3. Аналитичность. Другая важная теорема — степенной ряд аналитичен в своем круге сходимости. Рассмотрим степенной ряд
$$S(x) = \sum a_n x^n$$
с радиусом сходимости ρ.

Теорема 2.1. Рассмотрим точку x_0, такую что $|x_0| < \rho$. Тогда степенной ряд

$$\sum \frac{1}{n!} S^{(n)}(x_0) Z^n$$

имеет радиус сходимости не меньше $\rho - |x_0|$ а при $|x - x_0| < \rho - |x_0|$

$$S(x) = \sum \frac{1}{n!} S^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n.$$

Доказательство. Имеем (положим $r_0 = |x_0|$)

$$S^{(p)}(x_0) = \sum_{q \geq 0} \frac{(p+q)!}{q!} a_{p+q} x_0^q,$$

$$|S^{(p)}(x_0)| \leq \sum_{q \geq 0} \frac{(p+q)!}{q!} \alpha_{p+q} r_0^q,$$

где как и раньше положим $|a_n| = \alpha_n$. При $r_0 \leq r \leq \rho$

$$\sum_{p \geq 0} \frac{1}{p!} |S^{(p)}(x_0)|(r - r_0)^p \leq \sum_{p,q} \frac{(p+q)!}{p!q!} \alpha_{p+q} r_0^q (r - r_0)^p \leq$$

$$\leq \sum_{n \geq 0} \alpha_n \left(\sum_{0 \leq p \leq n} \frac{n!}{p!(n-p)!} (r - r_0)^p r_0^{n-p} \right) \leq \sum_{n \geq 0} \alpha_n r^n < +\infty$$

следовательно радиус сходимости не меньше $r - r_0$, а r можно брать близко к ρ. Поэтому радиус сходимости не меньше $\rho - |x_0|$.

Пусть $|x - x_0| < \rho - |x_0|$ двойной ряд

$$\sum_{p,q} \frac{(p+q)!}{p!q!} a_{p+q} x_0^q (x - x_0)^p$$

сходится абсолютно. И можно его вычислять, группируя члены как угодно. Так, с одной стороны:

$$\sum_{n \geq 0} a_n \left(\sum_{0 \leq p \leq n} \frac{n!}{p!(n-p)!} (x - x_0)^p x_0^{n-p} \right) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n = S(x).$$

Или суммируя иначе

$$\sum_{p \geq 0} \frac{(x - x_0)^p}{p!} \left(\sum_{q \geq 0} \frac{(p+q)!}{q!} a_{p+q} x_0^q \right) = \sum_{p \geq 0} \frac{(x - x_0)^p}{p!} S^{(p)}(x_0).$$

Что и доказывает теорему.

2.4. Замечание. Радиус сходимости в точке x_0 может быть больше $\rho - |x_0|$. Найдите радиус сходимости ряда Тейлора функции

$$\frac{1}{1 + x^2}$$

с центром в точке $a \in \mathbb{R}$.

3. Лекция третья.

3.1. Векторные поля и дифференциальные формы.

Сначала векторные поля. Потом формы $Pdx + Qdy$ коэффициенты, вообще говоря, комплексно-значные непрерывные функции.

3.2. Интеграл дифференциальной формы вдоль пути. Интеграл

$$\int\limits_{\gamma} \omega = \int\limits_{a}^{b} \gamma^*(\omega)$$

Подумайте, что значит и почему, что интеграл не меняется при замене параметра. Подход через разбиения - правильно вначале.

$$\int\limits_{\gamma} \omega = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} \omega(\xi_i)$$

Лемма 3.1. В связной области можно добраться из точки в точку по кусочно-гладкому пути.

При интегрировании важнее всего знать, что

$$\int\limits_{\gamma} dF = F(b) - F(a).$$

3.3. Первообразная дифференциальной формы. Функция F называется первообразной формы ω, если $dF = \omega$.

Лемма 3.2. Форма имеет первообразную, если и только если интеграл этой формы по любому замкнутому кусочно-гладкому пути равен нулю.

Необходимость очевидна

Достаточность строим F как интеграл ω от фиксированной точки, доказываем $dF = \omega$ явным взятием дифференциала.

Пусть теперь только по границе прямоугольника интеграл равен нулю. Тогда если область круг, то первообразная есть. (Лемма)

Формула Грина. П – прямоугольник, γ его граница. Тогда

$$\int\limits_{\gamma} Pdx + Qdy = \int\limits_{\Pi} (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}) dx \wedge dy$$

Теорема 3.1. Если $Pdx + Qdy$ в области такова что $\frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x}$ существуют и непрерывны в этой области. Тогда необходимое условие существования первообразной есть

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Для круга оно же является и достаточным.

3.4. Замкнутые формы. Назовем форму замкнутой (коэффициенты непрерывны) если для каждой точки в некоторой ее окрестности есть первообразная. Из того что мы обсудили следует: Для замкнутости необходимо и достаточно чтоб для всякого достаточно малого прямоугольника, стороны которого параллельны осям координат, интеграл по его границе равен нулю. Если предположить существование частных производных первого порядка, то необходимым и достаточным будет

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Пример области и формы замкнутой, но не имеющей в этой области первообразной. $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ и форма

$$\frac{dz}{z}$$

3.5. Голоморфность. Проверьте, что комплексно-дифференцируемая функция f является вещественно дифференцируемой и

$$\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

Докажите, что функция f такова что она вещественно дифференцируема и ее частные производные связаны в точке этим соотношением, то она и голоморфна.

Введение dz, $d\bar{z}$ и

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}), \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y})$$

Проверьте, что

$$df = \frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}d\bar{z}$$

а условие голоморфности имеет вид:

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$$

Теорема Коши это следующая теорема.

Теорема 3.2. Если функция f голоморфна в области, то $f(z)dz$ замкнута в этой области.

1. Действительно, если предположить непрерывность частных производных, то автоматически.

2. Если не предполагать

$$\int\limits_{\partial\Pi} f(z)dz = g(\Pi)$$

делим на 4 равные части есть такой Π_1, что $|g(\Pi_1)| \geq 1/4|g(\Pi)|$ и дальше так делим и выбираем - сходится к z_0

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \varepsilon(z)|z - z_0|$$

при этом

$$\lim_{z \to z_0} \varepsilon(z) = 0$$

откуда

$$\int\limits_{\partial \Pi_k} f(z)dz = f(z_0) \int\limits_{\partial \Pi_k} dz + f'(z_0) \int\limits_{\partial \Pi_k} (z - z_0)dz + \int\limits_{\partial \Pi_k} \varepsilon(z)|z - z_0|dz$$

два первых интеграла равны нулю, а последний бесконечно малая высшего порядка чем $1/4^k$. Откуда $\int f(z)dz = 0$.

Следствие 3.1. У голоморфной функции есть локально первообразная, которая голоморфна.

Следствие 3.2. Для голоморфной функции $\int f(z)dz = 0$ по замкнутому пути, стягиваемому в точку.

4. Лекция четвертая.

Теорему Коши можно немного усилить (бывает полезно) — пусть функция непрерывна в области и голоморфна всюду кроме точек прямой, параллельной действительной оси. Тогда $f(z)dz$ замкнута в этой области.

Нужно показать, что интеграл $f(z)dz$ по границе всякого прямоугольника из области равен нулю. Если прямоугольник не пересекается с прямой это верно. Если прямая проходит через одну из сторон - предельный переход. Если пересекает иначе, то разбиваем на два прямоугольника и тоже предельный переход.

Немного топологии – индекс замкнутой кривой относительно точки. Пусть в $\mathbb{C}$ фиксирована точка. Тогда вы знаете из курса топологии, что $\pi_1(\mathbb{C} \setminus \{a\})$ очень проста, она изоморфна $\mathbb{Z}$. Есть два таких изоморфизма и мы фиксируем "математический" – обход один раз вокруг a против часовой стрелки переходит в единицу. Так каждой замкнутой кривой, не проходящей через точку a, сопоставляется целое число – индекс $I(\gamma, a)$ пути относительно точки a. У этого числа есть замечательное выражение, связанное с большей частью нашего курса. Докажите:

$$I(\gamma, a) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{dz}{z - a}.$$

4.1. Интегральная формула Коши.

Теорема 4.1. Пусть f голоморфна в области. Точка a лежит в области и γ замкнутый путь в этой области, не проходящий через a и стягиваемый в точку в этой области.

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{f(z)dz}{z-a}=f(a)I(\gamma,a)$$

Доказательство. Определим функцию g как

$$\frac{f(z)-f(a)}{z-a}$$

при $z\neq a$ и $f'(a)$ при $z=a$. Эта функция непрерывна в a и голоморфна вне a. Следовательно, по уточненной теореме Коши

$$\int\limits_{\gamma}\frac{f(z)-f(a)}{z-a}dz=0$$

А интеграл формы

$$\int\limits_{\gamma}\frac{f(a)}{z-a}dz$$

мы вычислять умеем, он равен $2\pi i f(a)I(\gamma,a)$.

4.2. Разложение в ряд Тейлора.

Теорема 4.2. Голоморфная функция разлагается в степенной ряд в открытом круге голоморфности.

Доказательство. Действительно,

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{f(t)dt}{t-z}$$

γ – окружность, пройденная в положительную сторону. Это интегральное выражение раскладывается в ряд (геометрическая прогрессия):

$$\frac{1}{t-z}=\frac{1}{t}\frac{1}{1-z/t}=\frac{1}{t}(1+\frac{z}{t}+\frac{z^2}{t^2}+...),$$

и получаем

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\sum z^n\frac{f(t)}{t^{n+1}}dt.$$

Этот ряд нормально сходится при $|z|<r$ поэтому можно интегрировать почленно получаем

$$f(z)=\sum a_n z^n,$$

где

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=r} \frac{f(t)}{t^{n+1}} dt.$$

4.3. Теорема Морера.

Теорема 4.3. Если функция f непрерывна и форма $f(z)dz$ замкнута, то f голоморфна в области.

Доказательство. Функция f локально обладает примитивной, которая голоморфна, а стало быть и ее производная голоморфна.

4.4. Версия интегральной формулы Коши.

Теорема 4.4. Для голоморфной функции и ориентированной границы компакта:

$$\int\limits_{\partial K} f(z)dz = 0$$

Если точка a лежит внутри компакта, то

$$\int\limits_{\partial K} \frac{f(z)dz}{z-a} = 2\pi i f(a).$$

4.5. Принцип симметрии Шварца. Задача: Пусть есть симметричная относительно действительной оси область и функция f – непрерывная в пересечении области с замкнутой верхней полуплоскостью и голоморфная в пересечении области с открытой верхней полуплоскостью. Тогда f продолжается до голоморфной в области (в часть лежащую в нижней полуплоскости) по формуле $f(z) = \overline{f(\bar{z})}$

4.6. Неравенство Коши, теорема Лиувилля и основная теорема алгебры.

Итак,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f(t)dt}{t-z}$$

Где γ граница круга в котором функция голоморфна (мы считаем, что функция голоморфна в большем открытом круге), пройденная в положительную сторону. При помощи формулы суммы геометрической прогрессии

$$\frac{1}{t-z} = \frac{1}{t}\frac{1}{1-z/t} = \frac{1}{t}(1 + \frac{z}{t} + \frac{z^2}{t^2} + ...)$$

мы получили:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=r} \frac{f(t)}{t^{n+1}} dt.$$

Если $|f(z)| \leq M(r)$, на границе круга радиуса r, то получаем оценку

$$|a_n| \leq \frac{M(r)}{r^n}.$$

Эту оценку называют неравенством Коши.

Немедленно получаем следствие - Теорема Лиувилля: Ограниченная на комплексной прямой функция постоянна. В самом деле, из этого неравенства Коши вытекает что $|a_n| = 0$ при $n \geq 1$.

Удивительное следствие из этой теоремы: не существует биголоморфного (то есть такого, к которому есть голоморфное обратное) отображения между комплексной прямой $\mathbb{C}$ и открытым диском в $\mathbb{C}$. В самом деле, на диске ограниченные непостоянные голоморфные функции есть, сколько угодно, например просто z. Биголоморфное отображение переводит непостоянную функцию в непостоянную.

Докажем основную теорему алгебры с помощью теоремы Лиувилля: у любого многочлена степени больше нуля есть корень в $\mathbb{C}$. В самом деле, если б нашелся многочлен p без корня, то функция $1/p$ была б ограниченной непостоянной голоморфной функцией (доведите рассуждение до конца).

4.7. Теорема о среднем.

Теорема 4.5. Значение в нуле голоморфной функции есть среднее значение по любой окружности с центром в нуле, такой что весь диск, ограниченный этой окружностью, лежит в области голоморфности.

Доказательство. В самом деле, интегральная формула Коши (или выражение для a_0) для нуля имеет вид:

$$f(0) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_r} \frac{f(t)dt}{t}$$

где γ_r окружность радиуса r, ограничивающая диск радиуса r, весь этот диск лежит в области голоморфности. Подставим параметризацию $re^{i\varphi}$ окружности, получим

$$f(0) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(re^{i\varphi}) d\varphi.$$

4.8. Нули.

Теорема 4.6. Нули голоморфной непостоянной функции изолированы.

Доказательство. В самом деле, функция голоморфна и следовательно, как мы видели, раскладывается в степенной ряд в некоторой окрестности любой своей точки z_0

$$f(z) = \sum a_k (z - z_0)^k.$$

Либо f обращается в ноль в некоторой окрестности z_0, либо этот ряд начинается с ненулевого члена и функция f имеет вид

$$(z-z_0)^k(a_k+a_{k+1}(z-z_0)+...),$$

где $a_k \neq 0$. Следовательно отлична от нуля в некоторой проколотой окрестности точки z_0. Таким образом множество нулей голоморфной в открытом множестве U функции замнкнуто в U, как просто множество нулей непрерывной функции, более того его точки либо изолированы в U, либо внутренние.

Задача 2. Покажите, что множество тех нулей которые внутренние есть объединение компонент связности множества U.

У любого ненулевого комплексного числа $a = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ есть ровно k корней степени k. Задаются они формулой $\sqrt[k]{r}(\cos(\frac{\varphi}{k}+\frac{2\pi j}{k})+i\sin(\frac{\varphi}{k}+\frac{2\pi j}{k}))$ при $j = 0, ..., k-1$. Докажите что в любой связной односвязной области $U \subset \mathbb{C}\setminus\{0\}$ есть ровно k непрерывных функций f таких что $f^k(z) = z$. Покажите, что все эти функции голоморфны. Голоморфность доказывается примерно так: функции f обратны к голоморфной функции z^k, а функция обратная к голоморфной является голоморфной. Она вещественно дифференцируема как отображение $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ и ее производная является так-называемым овеществлением оператора умножения на комплексное число - почему? Следовательно она голоморфна.

Рассмотрим голоморфную функцию f. Если она непостоянна ни в какой окрестности точки z_0, то ее ряд Тейлора с центром в z_0 отличен от константы. Покажем, что для непостоянной функции есть такое единственное k, что найдется такая голоморфная функция h что

$$f(z) = f(z_0) + (h(z))^k$$

в некоторой окрестности точки z_0 и $h(z_0) = 0$, но $h'(z_0) \neq 0$. Действительно, разложение Тейлора для $f(z) - f(z_0)$ начинается с ненулевого члена $a(z-z_0)^k$ порядка $k \geq 1$. Функция

$$g(z) = \frac{f(z) - f(z_0)}{(z-z_0)^k}$$

аналитична там же где и f и не равна нулю в точке z_0. Почему она голоморфна в точке z_0? Образ небольшой окрестности точки z_0 лежит в односвязном множестве, поэтому можно взять композицию одной из ветвей корня k-й степени и получим голоморфную функцию l. Проверьте, что $h(z) = (z-z_0)l(z)$ удовлетворяет условиям теоремы.

4.9. Принцип сохранения области.. Будем говорить, что голоморфная фукция нигде не постоянна если ее ограничение на любое непустое открытое подмножество области определения есть непостоянная функция. Если голоморфная функция нигде не постоянна, то образ открытого множества открыт. Докажите!

4.10. Принцип максимума. Пусть U линейно связное открытое множество, f голоморфна в U и непрерывна в замыкании $\overline{U}$ тогда $|f|$ достигает максимума на ∂U, если максимум модуля $|f|$ достигается в точке множества U, то f постоянна на $\overline{U}$. Легко следует из принципа сохранения области.

5. Лекция пятая. 10 марта

5.1. Лемма Шварца.

Теорема 5.1. Пусть функция f голоморфна в открытом единичном круге $D = \{z||z| < 1\}$. Пусть, кроме того, $|f| < 1$ и $f(0) = 0$. Тогда при любом z из круга $|f(z)/z| \leq 1$. Если где-то в ненулевой точке достигается равенство в этом неравенстве, то $f(z) = kz$ с константой k модуль которой равен единице.

Доказательство. Рассмотрим функцию $f(z)/z$ на замкнутом круге радиуса $r < 1$ с центром в нуле. Тут важно заметить, что она продолжается по непрерывности в ноль и голоморфна в нуле. На границе она не больше $1/r$. Следовательно, на всем этом круге $|f(z)/z| \leq 1/r$. Искомое в лемме неравенство получается предельным переходом. Если где-то в ненулевой точке z_0 есть равенство $|f(z_0)| = |z_0|$, то $f(z)/z$ постоянна во всем круге D, то $f(z)/z = k$.

5.2. Ряды Лорана. Часто приходится рассматривать следующие функции – заданные рядом, но не степенным как мы привыкли, а степенным с ненулевыми коэффициентами при отрицательных показателях степени.

Рассмотрим формальный ряд

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n.$$

Такой ряд называется рядом Лорана.

Что такое его сумма? Нужно разделить его на две части – с неотрицательными показателями степени и с отрицательными показателями. Первый, как мы уже знаем, абсолютно и равномерно сходится в любом компакте лежащем круге $|z| < r_1$ (r_1 – радиус сходимости этого ряда) и является голоморфной функцией в этом открытом круге. Со вторым чуть хитрее – надо рассмотреть $\sum\limits_{n<0} a_n z^n$ и подставить $1/u$ вместо z. Тогда получим голоморфную функцию от переменной u в круге $|u| < R_1$. Стало быть $\sum\limits_{n<0} a_n z^n$ есть композиция этой функции и голоморфного вне нуля отображения $z \to 1/z$. Второй абсолютно и равномерно сходится в любом компакте лежащем в кольце $|z| > r_2 = 1/R_1$ и является голоморфной функцией в этом кольце. Таким образом исходный ряд

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n.$$

абсолютно и равномерно сходится на любом компакте лежащем в кольце $r_2 < |z| < r_1$ к голоморфной функции на этом кольце. Конечно, это имеет смысл только если $r_2 < r_1$.

Говорят, что функция f разлагается в кольце $r_2 < |z| < r_1$ в ряд Лорана если найдется такой ряд Лорана, который сходится в этом кольце (части с отрицательными и неотрицательными показателями сходятся). Можно добавить и о сходимости – абсолютной и равномерной на любом подкомпакте или даже достаточно любом замкнутом подкольце, так как каждый подкомпакт содержится в таком подкольце.

Покажем, что ряд Лорана единственен, если он есть. Действительно – рассмотрим ограничение функции на окружность $|z| = r, r_2 < r < r_1$. Тогда ряд

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n.$$

абсолютно и равномерно сходится на этой окружности, умножив на $e^{-in\varphi}$ и проинтегрировав получаем

$$a_n r^n = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} e^{-in\varphi} f(re^{i\varphi})d\varphi$$

так что коэффициенты однозначно заданы функцией.

Теорема 5.2. Любая функция голоморфная в кольце $r_2 < |z| < r_1$ раскладывается в нем в ряд Лорана.

Доказательство. В самом деле, рассмотрим интегральную формулу Коши для чуть уменьшенного кольца, для z лежащих в этом уменьшенном кольце

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_1}\frac{f(t)dt}{t-z} - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_2}\frac{f(t)dt}{t-z}$$

тут γ_1 – внешняя, а γ_2 – внутренняя граница.

В первом из этих интегралов

$$\frac{1}{t-z} = \sum_{n\geq 0}\frac{z^n}{t^{n+1}}$$

и потому

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_1}\frac{f(t)dt}{t-z} = \sum_{n\geq 0}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_1}\frac{f(t)dt}{t^{n+1}}z^n$$

Во втором интеграле надо чуть хитрее разобраться с прогрессией

$$\frac{1}{t-z} = -\frac{1}{z}\frac{1}{1-t/z} = -\sum_{n<0}\frac{z^n}{t^{n+1}}$$

и мы можем заменить на этот ряд. Получаем, что второй интеграл дает нам

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_2}\frac{f(t)dt}{t-z} = \sum_{n<0}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_2}\frac{f(t)dt}{t^{n+1}}z^n.$$

Мы видим, что голоморфная в кольце $r_2 < |z| < r_1$ функция раскладывается в сумму функции f_1 голоморфной в круге $|z| < r_1$ и в f_2 голоморфной в бесконечном кольце $r_2 < |z|$. Такое разложение не единственно, можно добавить к первой функции z а из второй отнять, например. Если предположить, что f_2 стремится в ноль в бесконечности, то это разложение есть и единственно.

Действительно, ряд Лорана дает такое разложение в сумму двух функций (проверьте!). Для второго такого разложения имеем $f = f_1 + f_2 = g_1 + g_2$. Следовательно: $f_1 - g_1 = g_2 - g_1$ и мы получаем голоморфную функции на всей прямой $\mathbb{C}$ равную в круге $|z| < r_1$ $f_1 - g_1$ и $g_2 - g_1$ в $|z| > r_2$. Она стремится к нулю в бесконечности и следовательно тождественно равна нулю.

5.3. Изолированные особые точки.

Пусть функция f определена в проколотом диске $0 < |z| < r$. Оказывается, ее можно продолжить в ноль до голоморфной функции если (и только если) она ограничена в некоторой проколотой окрестности нуля.

Имеем, для коэффициентов ряда Лорана мы видели соотношение:

$$a_n r^n = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} e^{-in\varphi} f(re^{i\varphi}) d\varphi$$

поэтому если модуль функции ограничен константой C в некоторой проколотой окрестности нуля то

$$|a_n| \geq \frac{C}{r^n}$$

где при отрицательных n получаем $a_n = 0$ и ряд Лорана есть ряд Тейлора.

5.4. Мероморфные функции. Отношение двух голоморфных функций называется мероморфной функцией. Покажите, что в ряду Лорана мероморфной функции есть только конечное число ненулевых членов с отрицательными показателями. Если функция не слишком быстро растет в нуле то она мероморфна (покажите). Полюсом называется особенность мероморфной функции.

Функция называется мероморфной в бесконечности если найдется такое натуральное n и положительные константы C и R, что на окружности произвольного радиуса $R_1 > R$ функция меньше по модулю чем CR_1^n.

5.5. Существенно особые точки. Бывает еще случай функции определенной в окрестности нуля и такой что в ряде Лорана конечное число членов с отрицательным показателем. Такая особая точка называется существенно особой точкой.

Теорема Сохоцкого Вейерштрасса. Если 0 изолированная существенная особенность функции f, то образ любой проколотой окрестности нуля всюду плотен в $\mathbb{C}$.

Доказательство. От противного – пусть окрестность точки a не пересекается с образом некоторой проколотой окрестности нуля, то есть

$$|f(z) - a| > r$$

при $0 < |z| < \varepsilon$. Рассмотрим функцию

$$\frac{1}{f(z) - a} = g(z).$$

Она, наоборот, ограничена в проколотой окрестности нуля. Как мы знаем такая функция продолжается в ноль до голоморфной функции. Функция

$$f(z) = \frac{1}{g(z)} + a$$

есть отношение двух голоморфных и следовательно мероморфна и следовательно у нее ноль не существенно особая точка. Утверждение доказано.

6. Лекция шестая. 17 марта

6.1. Вычеты. Что такое вычет изолированной особой точки – интеграл формы $\frac{1}{2\pi i} f(z)dz$ по замкнутому пути один раз обходящему вокруг особой точки в положительную сторону. Покажите, что вычет равен коэффициенту

$$a_{-1}$$

ряда Лорана. (Все остальные члены дают ноль). Вычет точки z_0 обозначим как

$$Res(f, z_0).$$

6.2. Теорема о вычетах. В $\mathbb{C}$. Пусть f голоморфна в открытом множестве $U \subset \mathbb{C}$ за исключением изолированных особенностей.

Пусть $K \subset U$ – компакт с достаточно хорошей границей Γ и пусть Γ не задевает особенности функции f.

Тогда число особых точек в K конечно и

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)dz = 2\pi i \sum Res(f, z_k)$$

Сфера Римана. Комплексные многообразия. Вычет в бесконечности. Для определения вычета в бесконечности сделаем замену $z = 1/w$, получим

$$f(z)dz = -\frac{1}{w^2} f(\frac{1}{w})dw$$

и по определению положим вычет в бесконечности равным вычету в нуле формы $-\frac{1}{w^2} f(\frac{1}{w})dw$.

Покажите, что теорема о вычетах справедлива и в сфере Римана. В частности, если наше множество U есть вся сфера, то у нее нет границы и левая часть равенства обнуляется

$$0 = \sum Res(f, z_k).$$

Сумма всех (конечно включая вычет в бесконечности) вычетов функции с изолированными полюсами равна нулю.

Теорема о вычетах поможет нам считать много определенных интегралов. Сначала надо научиться считать вычеты. Лучше всего это (учиться) делать на частных примерах. Если $f = \frac{p}{q}$ и нуль z_0 фунции q прост, как часто бывает, то вычет функции f в особой точке z_0 равен

$$\frac{p(z_0)}{q'(z_0)}$$

.

6.3. Логарифмический вычет. До перехода к вычислению интегралов типа

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(x)dx}{x^4+1},$$

сделаем простое, красивое и важное вычисление. Логарифмической производной фунции f называют выражение

$$\frac{f'}{f},$$

совпадающее с производной композиции логарифма и функции f для вещественных функций (там где они положительны). В комплексной области логарифм многозначен, а вот его производная однозначна (подумайте почему). И производная функции $ln(f)$ задается приведенной формулой. Где будут особые точки логарифмической производной мероморфной функции? там где у самой функции нули и полюса. Проверьте что в нулях функции f кратности k вычет логарифмической производной как раз равен k, а в полюсах кратности k равен $-k$.

Поэтому

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f'(z)dz}{f(z)} = Z - P,$$

где Γ ориентированная граница достаточно хорошего компакта как и раньше.

6.4. Принцип аргумента. Объясним при чем тут логарифм. Что такое логарифм? Это обратная функция к экспоненте

$$e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y).$$

Конечно, никакой обратной функции быть не может, поскольку экспонента периодична. Но есть многозначная функция, значение которой в каждой ненулевой точке определено с точностью до $2\pi i\mathbb{Z}$:

$$\mathrm{Ln}(z) = \log|z| + i\mathrm{arg}(z).$$

Это не очень страшно: если есть путь

$$\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}\setminus\{0\},$$

то можно выбрать непрерывную функцию $f\colon [a,b] \to \mathbb{C}$, что

$$\gamma(t) = e^{f(t)}.$$

Более того, такой выбор единственен с точностью до добавления константы из $2\pi i\mathbb{Z}$. Кроме этого экспоненту можно обратить локально (докажите).

Хоть логарифм и неоднозначен, его дифференциал (и производная) однозначные объекты, дифференциал константы (равной $2\pi ik$) равен нулю. Главное для нас сейчас наблюдение (утверждение) есть следующее равенство:

$$d\mathrm{Ln}(z) = \frac{dz}{z}.$$

Выберем локальное обращение экспоненты которое тоже будем обозначать Ln. Имеем

$$e^{\mathrm{Ln}(z)} = z$$

при всех z из окрестности фиксированной ненулевой точки. Дифференцируя, получаем

$$z(\mathrm{Ln}(z))' = 1.$$

Таким образом,

$$(\mathrm{Ln}(z))' = \frac{1}{z}.$$

Задача 3. Придумайте геометрическое доказательство равенства $d\mathrm{Ln}(z) = \frac{dz}{z}$.

Следовательно,

$$\frac{f'(z)}{f(z)}dz = d(\mathrm{Ln} \circ f)(z).$$

Откуда, используя то, что

$$\mathrm{Ln}(z) = \log|z| + i\arg(z),$$

получаем, что интеграл

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)dz}{f(z)},$$

вдоль пути γ равен приращению любой непрерывной ветви многозначной функции $\frac{1}{2\pi i}Ln \circ f$. По замкнутому пути это приращение равно деленному на 2π приращению аргумента – приращение мнимой части равно нулю!

6.5. Теорема Руше. Пусть функции f и g голоморфны в компакте K с достаточно хорошей границей. На которой при всех x верно неравенство

$$|f(x)| > |g(x)|.$$

Тогда число нулей (с кратностями) в K для f такое же как это же число для $f + g$.

Эту теорему можно доказать исходя из непрерывности (при $t \in [0, 1]$) интеграла

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial K} \frac{(f' + tg')(z)dz}{(f + tg)(z)},$$

значение которого есть целое число, равное числу нулей с кратностями функции $f + tg$.

7. Лекция седьмая. 24 марта

7.1. О вычетах, повторение.

Что такое вычет изолированной особой точки - интеграл формы $\frac{1}{2\pi i} f(z)dz$ по замкнутому пути один раз обходящему вокруг особой точки в положительную сторону. Покажите, что вычет равен коэффициенту

$$a_{-1}$$

ряда Лорана. (Все остальные члены дают нулевой вклад в интеграл). Вычет точки z_0 обозначим как

$$Res(f, z_0).$$

7.2. Теорема о вычетах. Пусть f голоморфна в открытом множестве $U \subset \mathbb{C}$ за исключением изолированных особенностей. Пусть $K \subset U$ – компакт с достаточно хорошей границей Γ и пусть Γ не задевает особенности функции f. Тогда число особых точек в K конечно и

$$\int_\Gamma f(z)dz = 2\pi i \sum Res(f, z_k).$$

Как доказать эту теорему – окружить каждую изолированную особенность достаточно малой окружностью и выбросить из K открытые круги U_i, ограниченные этими окружностями. Достаточность малости тут состоит в том, что все эти круги лежат в K и не пересекаются. Интеграл по ориентированной границе $K \setminus \cup U_i$ от формы $f(z)dz$ равен нулю с одной стороны, а с другой стороны этот интеграл равен

$$\int_\Gamma f(z)dz - 2\pi i \sum Res(f, z_k).$$

7.3. Вычет в бесконечности. Вычет удобно определять для 1-формы на комплексном одномерном многообразии. Окружили особенность окружностью, ориентировали ее в положительную сторону, и проинтегрировали форму. Можно скрыть, что мы знаем что такое многообразие и действовать так :

Для определения вычета в бесконечности сделаем замену $z = 1/w$, получим

$$f(z)dz = -\frac{1}{w^2} f(\frac{1}{w})dw$$

и по определению положим вычет в бесконечности равным вычету в нуле формы $-\frac{1}{w^2} f(\frac{1}{w})dw$.

Покажите, что теорема о вычетах справедлива и в сфере Римана. В частности, если наше множество U есть вся сфера, то у нее нет границы и левая часть равенства обнуляется

$$0 = \sum Res(f, z_k).$$

Сумма всех (конечно включая вычет в бесконечности) вычетов функции с изолированными полюсами равна нулю.

Интегралы и вычеты.

Мы рассмотрим разные интегралы, в вычислении которых основную роль играет теорема о вычетах. Вторичную и часто совсем непростую роль играет выбор контура (так, классически принято называть путь интегрирования на комплексном одномерном (в нашем случае) многообразии) интегрирования — у исходного интеграла он не является границей, также иногда приходится интегрировать не совсем исходную функцию.

1. Рассмотрим интеграл рациональной функции

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx$$

P, Q – многочлены. Мы будем считать, что у P и Q нет общих корней. Чтобы этот интеграл сходился необходимо и достаточно чтобы у многочлена Q не было действительных корней и выполнялось неравенство

$$\deg P + 1 < \deg Q.$$

Классически принято с этим интегралом поступать так. Рассмотрим

$$\int\limits_{-R}^{+R} \frac{P(x)}{Q(x)} dx$$

и замкнем этот отрезок полуокружностью γ_R, лежащую в верхней полуплоскости. Ориентируем этот контур как границу полудиска. При большом R все полюса лежащие в верхней полуплоскости попадут внутрь полудиска. Интеграл по его диаметру стремится к искомому значению. Покажем, что

$$\lim_{R \to +\infty} \int\limits_{\gamma_R} \frac{P(z)}{Q(z)} dz = 0.$$

Из этого сразу следует, что искомый интеграл равен

$$2\pi i \sum Res(\frac{P}{Q}, z_k)$$

где суммирование распространено на все полюса лежащие в верхней полуплоскости. Интеграл по полуокружности

$$\int\limits_{\gamma_R} \frac{P(z)}{Q(z)} dz$$

равен интегралу

$$\int\limits_{0}^{\pi} \frac{P(Re^{i\varphi})}{Q(Re^{i\varphi})} Re^{i\varphi} i d\varphi$$

и его модуль оценивается так:

$$|\int\limits_0^\pi \frac{P(Re^{i\varphi})}{Q(Re^{i\varphi})} Re^{i\varphi} i d\varphi| \le \int\limits_0^\pi |\frac{P(Re^{i\varphi})}{Q(Re^{i\varphi})} Re^{i\varphi} i| d\varphi \le \int\limits_0^\pi \frac{C}{R^2} R d\varphi = C\pi/R,$$

для подходящей положительной константы C. Если мы замкнем полуокружностью в нижней полуплоскости, то наш интеграл окажется равен

$$-2\pi i \sum Res(\frac{P}{Q}, z_k)$$

где суммирование распространено на все полюса лежащие в нижней полуплоскости (почему минус?).

Для этого интеграла можно было не переходить к пределу, а рассмотреть нашу форму на сфере Римана и доказать (как?) что она продолжается голоморфно (а не мероморфно) в бесконечность. Так что, добавив к исходному контуру $\mathbb{R}$ одну точку ∞, получим замечательный компактный контур – границу полусферы, по которой надо проинтегрировать форму без особенностей на этой границе.

Мы продолжаем обсуждать интегралы, следующий "тип"

2. Интеграл

$$\int\limits_0^{2\pi} R(\sin x, \cos x) dx$$

для рациональной функции R без полюсов на окружности $x^2 + y^2 = 1$. Запараметризуем окружность при помощи комплексной экспоненты. Получим, что наш интеграл равен интегралу от рациональной функции

$$Q(z) = (1/iz) R(\frac{1}{2i}(z - \frac{1}{z}), \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z}))$$

по единичной окружности в комплексной прямой. А этот интеграл равен $2\pi i$ умножить на сумму вычетов Q по всем полюсам в единичном круге. Вычислите, например, интеграл

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{5 - \cos x}.$$

3. Следующий часто встречающийся тип интеграла

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{ix} dx,$$

отметим сразу, что часто встречается его действительная или мнимая часть. Пусть f определена в верхней полуплоскости без конечного множества точек и голоморфна там (пусть на действительной оси нет особенностей). Рассмотрим такой контур – граница полукруга, ориентированная в положительную сторону: полуокружность (окружности радиуса r с центром в нуле) $S(r)$ в верхней полуплоскости и отрезок вещественной оси $[-r,r]$. И мы хотим, чтобы при росте r интеграл от $f(z)e^{iz}dz$ по полуокружности $S(r)$ стремился к нулю. Докажем, что это так если $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)=0$ (стремление к бесконечности только по верхней полуплоскости). Имеем:

$$\int\limits_{S(r)} f(z)e^{iz}dz = \int\limits_0^\pi f(re^{it})e^{ire^{it}}de^{it}.$$

А модуль интеграла соответственно оценивается так:

$$\Big|\int\limits_{S(r)} f(z)e^{iz}dz\Big| \leqslant \int\limits_0^\pi \Big|f(re^{it})e^{ire^{it}}ire^{it}\Big|dt = \int\limits_0^\pi \Big|f(re^{it})e^{ire^{it}}r\Big|dt =$$

$$= \int\limits_0^\pi \Big|f(re^{it})\Big|\Big|e^{ir(\cos t+i\sin t)}\Big|rdt \leqslant \int\limits_0^\pi M(r)e^{r(-\sin t)}rdt.$$

Тут $M(r)$ это максимум модуля фунции f по полуокружности $S(r)$. Покажем, что интеграл $\int\limits_0^\pi e^{-r\sin t}rdt$ оценивается сверху независящей от r константой. Делается это, скажем, так:

$$\int\limits_0^\pi e^{-r\sin t}rdt = 2\int\limits_0^{\pi/2} e^{-r\sin t}rdt \leqslant 2\int\limits_0^{\pi/2} e^{-rt/4}rdt,$$

так как $\sin t \geqslant t/4$ на $[0,\pi/2]$ (тут можно взять хоть $t/100$ вместо $t/4$). Последний интеграл можно явно взять:

$$\int\limits_0^{\pi/2} e^{-rt/4}rdt = -4e^{-rt/4}\Big|_{t=0}^{t=\pi/2},$$

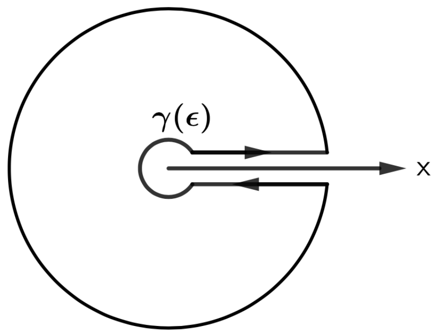
в нем сокращается "большой" множитель r и он уже не больше четырех. Таким образом, если $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)=0$ и интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{ix}dx$ сходится, то он равен $2\pi i$ умножить на сумму вычетов $f(z)$ в верхней полуплоскости. Вычислите интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x dx}{1+x^2}.$$

4. Сейчас мы обсудим интеграл вида:

$$\int_0^\infty \frac{R(x)}{x^\alpha}dx,$$

пусть R рациональная функция, стремящаяся к нулю в бесконечности, не имеющая особенностей на действительной оси, а число α находится между нулем и единицей. Из этих условий вытекает, что интеграл сходится. Для вычисления этого интеграла рассмотрим контур, схематично изображенный (отрезки проходящие дважды можно считать геометрически совпадающими) на рисунке.



Интегралы по большой $\gamma(r)$ и маленькой $\gamma(\varepsilon)$ окружности стремятся к нулю (докажите). Интеграл по отрезку $[\varepsilon, r]$ встречается в интеграле по всему контуру дважды — один раз мы идем в сторону возрастания $|z|$ и интегрируем $\frac{R(x)}{x^\alpha}$, второй раз мы идем в противоположную сторону, но и интегрируем другую непрерывную ветвь $\frac{R(x)}{x^\alpha}$, поскольку сделали один оборот в положительную сторону вокруг нуля. z^α умножается на $e^{2\pi i\alpha}$ при повороте вокруг нуля на $+2\pi$. Значит

$$(1 - e^{-2\pi i\alpha})\int_0^\infty \frac{R(x)}{x^\alpha}dx = 2\pi i\sum res(\frac{R(x)}{x^\alpha}).$$

Один минус из-за противоположного направления в интеграле, второй из-за деления на z^α. Найдите

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^\alpha(1+x)}.$$

5. Следующий интеграл

$$\int_0^\infty R(x)\ln x dx.$$

Где функция R рациональна и пусть она не имеет особенностей на луче интегрирования. Чтобы интеграл сходился потребуем, чтобы $\lim\limits_{z\to\infty} zR(z) = 0$ (почему такое условие?). Если мы опять рассмотрим тот же контур, что и выше, и будем интегрировать $R(z)\ln z dz$, то часть с логарифмическим множителем сократится и нужный интеграл не получится вычислить (а получится вычислить другой интеграл – какой и как?). Поэтому надо интегрировать форму $R(z)\ln^2 z dz$ по этому контуру. Покажите, что интегралы по большой $\gamma(r)$ и маленькой $\gamma(\varepsilon)$ окружности стремятся к нулю. Остается в равенстве, полученном из теоремы Коши предельным переходом:

$$-\int_0^\infty 4\pi i R(x)\ln x dx + \int_0^\infty 4\pi^2 R(x)dx = 2\pi i \sum res(R(z)\ln^2 z).$$

Тут два интеграла, но если функция R действительна, то быстро получаем ответ:

$$\int_0^\infty 4\pi i R(x)\ln x dx = -(1/2)Re \sum res(R(z)\ln^2 z).$$

Мы рассмотрели самые простые типы интегралов и не все. Особенности могут быть на вещественной оси или возникать при аналитическом продолжении. Иногда нужно модифицировать контур.

8. Лекция восьмая. 31 марта

8.1. Автоморфизмы комплексной прямой, круга и сферы Римана.

Как мы уже видели комплексная прямая $\mathbb{C}$ и открытый круг это разные комплексные многообразия. В самом деле, на комплексном круге много голоморфных непостоянных функций, а на прямой их нет. Сейчас мы изучим автоморфизмы (то есть голоморфные обратимые отображения) $\mathbb{C}$ в себя и докажем еще раз, что это разные многообразия.

Группа автоморфизмов $\mathbb{C}$ состоит из аффинных преобразований

$$z \mapsto az + b,$$

причем $a \neq 0$.

Докажем это. Рассмотрим автоморфизм $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Бесконечно удаленная точка на сфере Римана не может быть существенно особой точкой для f, так как образ любой проколотой окрестности существенно особой точки должен быть всюду плотен, а для автоморфизма этого не может быть. Следовательно, функция f является многочленом (почему?). Это может быть только многочлен первой степени – многочлены другой степени не могут быть автоморфизмами.

Автоморфизмы сферы Римана. Автоморфизмы сферы Римана это дробно-линейные преобразования $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$. В самом деле, каждое такое непостоянное отображение это автоморфизм сферы Римана и такие автоморфизмы образуют группу относительно композиции. Любой автоморфизм это композиция некоторого автоморфизма, оставляющего неподвижной бесконечно-удаленную точку, и дробно-линейного отображения. Автоморфизмы, оставляющие неподвижной бесконечно-удаленную точку мы уже знаем – это аффинные преобразования (частный случай дробно-линейных). Следовательно, автоморфизм сферы Римана есть композиция дробно-линейного отображения и аффинного, а это есть дробно-линейное отображение.

Изучим теперь автоморфизмы единичного круга $D = \{z||z| < 1\}$. Для начала рассмотрим автоморфизмы, сохраняющие ноль. Покажем, что это только повороты $f(z) = az$, $|a| = 1$. Действительно, по лемме Шварца $|z| \leqslant |f(z)|$ при всех z в круге D. С другой стороны, из утверждения леммы Шварца для обратного отображения f^{-1} получаем $|z| \geqslant |f(z)|$ при всех $z \in D$. Значит $|f(z)| = |z|$ и (из той же леммы Шварца) $f(z) = az$, $|a| = 1$. Докажите теперь, что группа всех автоморфизмов круга состоит из (только из) отображений вида

$$e^{i\varphi}\frac{z + z_0}{1 + \bar{z}_0 z},$$

где $\varphi \in [0, 2\pi[$, $|z_0| < 1$. Заметим, что ряд такого отображения в нуле начинается с

$$e^{i\varphi}(z + z_0)(1 - \bar{z}_0 z) = e^{i\varphi} z_0 + z(e^{i\varphi})(1 - \bar{z}_0 z_0) + ...$$

Его производная не больше 1.

Задача 4. Найдите автоморфизмы верхней полуплоскости.

8.2. Теорема Римана. План доказательства.

Мы будем доказывать следующую теорему: пусть есть область U (открытое подмножество прямой) в $\mathbb{C}$ которая связна, односвязна и отлична от $\mathbb{C}$. Тогда эта область изоморфна открытому диску D. Очень краткий план доказательства таков: мы покажем, что теорему достаточно показать для ограниченных областей, содержащихся в единичном круге, и содержащих ноль – $0 \in U \subset D$. Рассмотрим множество всех однолистных голоморфных функций на U (функция однолистна, если значения в разных точках разные), принимающих значения в D. Мы покажем, что среди этих функций можно найти функцию с максимальным по модулю значением производной в нуле. Эта экстремальная функция осуществит искомый изоморфизм.

8.3. Непрерывные и голоморфные функции.

Для реализации этого плана нам понадобятся следующие топологические рассуждения. Нам понадобится пространство $C = C(U)$ непрерывных комплекснозначных функций в области U. Будем говорить, что последовательность (f_n) функций из $C(U)$ сходится, если равномерно сходится ее ограничение на любой компакт, лежащий в U. Проверьте, что (поточечный) предел в случае сходимости также является непрерывной функцией, то есть лежит в $C(U)$.

В линейном пространстве $C(U)$ лежит подпространство $H(U)$ голоморфных функций. Покажем, что это замкнутое подпространство, относительно рассмотренной сходимости, то есть если голоморфные функции f_n сходятся равномерно на любом компакте к функции f, то их предел является голоморфной функцией. В самом деле, нужно показать, что форма $f(z)dz$ замкнута, а это будет следовать из того, что ее интеграл по (границе) прямоугольнику равен нулю, но на этой границе f есть равномерный предел функций f_n для которых интеграл формы $f_n(z)dz$ равен нулю. Значит форма $f(z)dz$ замкнута, а значит f голоморфна.

Следующий замечательный факт таков: предел голоморфных функций можно дифференцировать: если $\lim f_n = f$, то последовательность f_n' сходится и $\lim f_n' = f'$. Это вытекает из того, что для f' есть интегральная формула, содержащая f, а именно

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_r} \frac{f(t)dt}{t-z},$$

где γ_r окружность радиуса r, при всех z в круге меньшего радиуса чем r с тем же центром, что и γ_r, по формуле Коши. Дифференцируя получаем

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_r} \frac{f(t)dt}{(t-z)^2}.$$

Значит, если $f_n \to f$, то для данного компакта $K \subset U$ его можно покрыть конечным числом меньших кругов так что покрытие большими кругами, ограниченными окружностями γ_r все еще содержится в U. В этих меньших кругах сходимость производной есть и равномерная. Следовательно, она есть и на K.

8.4. Однолистные функции.

Будем считать, что область U связна. Рассмотрим сходящуюся последовательность голоморфных функций (f_n). Пусть все функции из этой последовательности были однолистны. Покажем, что предельная функция f или постоянна или однолистна. Пусть f непостоянна и значение a оно принимает не меньше двух раз в точках z_1, z_2. Тогда

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial U_r} \frac{f'(t)dt}{f(t)} \geqslant 2$$

∂U_r граница кругов достаточно малого радиуса r с центрами z_1, z_2. Следовательно, поскольку $f_k' \to f'$ и $f_k'/f_k \to f'/f$ на ∂U_r, то

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial U_r} \frac{f_n'(t)dt}{f_n(t)} \geqslant 2,$$

при больших n, а следовательно f_n не однолистна. Противоречие.

8.5. Метрика на $C(U)$.

Последовательность вложенных друг в друга компактов $K_i \subset U, K_i \subset K_{i+1}$ называется исчерпывающей, если любой подкомпакт области U вложен в компакт из этой последовательности с достаточно большим номером. Исчерпывающая последовательность существует: упорядочим как-то замкнутые шары с рациональными центрами и положительными рациональными радиусами, лежащими в U. Компакт K_i есть объединение первых i шаров (докажите, что эта последовательность в самом деле исчерпывающая). Зафиксируем какую-то исчерпывающую последовательность компактов.

Для непрерывной функции f положим $s_i(f) = \max_{z \in K_i} |f(z)|$ и определим

$$d(f) = \sum_{k \in \mathbb{N}} (1/2^k) \min(s_k(f), 1).$$

Положим $\rho(f, g) = d(f - g)$. Тогда ρ является метрикой. Неравенство треугольника для ρ следует из неравенства

$$d(f + g) \leqslant d(f) + d(g),$$

которое в свою очередь вытекает из $s_i(f + g) \leqslant s_i(f) + s_i(g)$. Сходимость в таким образом метризованном пространстве непрерывных функций эквивалентна равномерной сходмости на компактах (докажите).

9. Лекция девятая. 7 апреля

9.1. Ограниченность.

Множество функций называется ограниченным, если модуль ограничения на произвольный компакт $K \subset U$ ограничен константой $M(K)$ ($A \subset U$ ограничено, если для любого компакта $K \subset U$ есть такое число $M(K) \in \mathbb{R}_+$, что $|f(z)| < M(K)$ при любых $f \in A$ и $z \in K$). При этом функции из A могут и не быть ограниченными (A открыто). Отметим, что эта ограниченность вовсе не совпадает с ограниченностью в метрике ρ, в этой метрике все множества ограничены.

Оказывается, для подмножеств пространства голоморфных функций компактность равносильна ограниченности и замкнутости. Сейчас мы это докажем. Если подмножество в пространстве непрерывных функций компактно, то оно, очевидно, замкнуто. Образ компакта при отображении $f \mapsto \sup_{z \in K} |f(z)|$ компакт в $\mathbb{R}$ — следовательно компакт ограничен. Для справедливости обратного утверждения существенна голоморфность, а для подмножеств непрерывных функций компактность вообще говоря (приведите пример) не вытекает из ограниченности и замкнутости. Итак, докажем, что если подмножество пространства $H(U)$ ограничено и замкнуто, то оно компактно.

Мы будем доказывать, что из любой последовательности в ограниченном и замкнутом множестве голоморфных функций можно выбрать сходящуюся подпоследовательность.

9.2. Сходимость в круге.

Покажем, для начала, что для последовательности голоморфных функций в открытом круге из ограниченного множества сходимость (равномерно на любом компакте в этом круге) эквивалентна сходимости каждой производной в центре этого круга. В одну сторону мы это уже доказали – из равномерной сходимости на любом компакте голоморфных функций вытекает и равномерная сходимость на любом компакте их производных. Значит в центре круга сходится последовательность любой производной. Остается показать обратное утверждение.

Достаточно рассмотреть случай круга с центром в нуле. Пусть

$$f_k(z) = \sum a_{n,k} z^n$$

тейлоровские разложения этих функций. Напомним, что $|a_n| \leqslant \frac{M(r)}{r^n}$, где $M(r)$ верхняя грань модуля функции $\sum a_n z^n$ на окружности радиуса r. Поскольку функции последовательности были из ограниченного множества, то найдется такая константа C, что

$$|f_k(z)| \leqslant C$$

при всех k и $|z| < r_0$. Следовательно, внутри круга с центром в нуле и радиуса r меньше r_0 справедлива оценка

$$|f_m(z) - f_n(z)| \leqslant \sum_{i=0}^{p} |a_{i,m} - a_{i,n}| r^i + 2C \sum_{i=p+1}^{\infty} (r/r_0)^i.$$

Эти две величины (суммы) можно сделать меньше ε выбрав сначала p достаточно большим, а потом m, n достаточно большим. Следовательно f_k равномерно сходится на каждом замкнутом круге (радиуса r), лежащем в исходном открытом круге.

9.3. Завершение доказательства компактности.

Пусть f_n ограниченная последовательность голоморфных на U функций. Выберем счетное множество открытых кругов с центрами z_i так, что их объединение есть U. Каждой точке z_i и числу $n \in \mathbb{Z}_+$ сопоставим отображение, переводящее функцию f в число $f^{(n)}(z_i)$. Этих отображений счетное число, пронумеруем их натуральными числами: $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$. Выберем бесконечное подмножество $A_1 \subset \mathbb{N}$ по которому сойдется α_1, выберем потом бесконечное подмножество $A_2 \subset A_1$ по которому сойдется α_2, итд. Пусть теперь i-й номер подпоследовательности есть i-й элемент множества A_i. Так мы построили подпоследовательность, которая сходится (проверьте).

9.4. Доказательство теоремы Римана.

Рассмотрим связную односвязную область $U \subset \mathbb{C}$, отличную от всей прямой. Параллельным переносом переведем ее в область, не содержащую ноль. В получившейся области есть однозначная непрерывная ветвь логарифма. Взяв любую такую ветвь $\ln$ и зафиксировав ее применим ее к области получим не всюду плотное множество (если образ содержит точку a, то он не содержит точек $a+2\pi ik, k \neq 0$ и их окрестностей). Значит, любая функция $\frac{1}{\ln(z+b)-a+2\pi ik}$ (с подходящим образом подобранными b и a) голоморфно и однозначно переведет U в ограниченное множество, обратное отображение тоже голоморфно.

Поэтому будем считать, что наше множество U ограничено, содержится в единичном круге и содержит ноль. Рассмотрим множество A голоморфных функций f на U, переводящих ноль в ноль ($f(0) = 0$) и U в подмножество единичного диска D (то есть $|f(z)| < 1$ при всех $z \in U$) и однолистных на U, а также удовлетворяющих условию $|f'(0)| \geq 1$.

Это множество, во-первых, ограничено, так как $|f(z)| < 1$ при всех $z \in U$. Во-вторых, оно непусто – в нем есть функция z. В-третьих, оно замкнуто – действительно, предел (последовательности функций) f удовлетворяет $f(0) = 0$ и однолистен потому что в нуле у предела производная ненулевая, так как ее модуль не меньше единицы. Модуль предельной функции не принимает значения 1, потому что он был бы в этом случае постоянен на U, а $f(0) = 0$.

Таким образом наше множество A функций компактно. Функция $f \to |f'(0)|$ непрерывна на нем (почему?), поэтому есть функция с максимальным значением модуля прозводной. Покажем, что эта функция биголоморфно переводит U в единичный диск D.

Пусть образ области U под действием $f \in A$ ($f(0) = 0$) не содержит точку $a \in D$. Нам надо показать, что можно найти такую функцию $f_1 \in A$, что $|f_1'(0)| > |f(0)|$. Это делается явной конструкцией, которую мы сейчас опишем. Можно считать (без ограничения общности), что a вещественное положительное число. Рассмотрим функцию

$$\frac{f(z)-a}{1-af(z)}$$

которая является композицией $g_a \circ f$ функции f и автоморфизма g_a круга D, переводящего a в ноль. Она переводит U биголоморфно в подобласть единичного диска, не содержащую нуля. Поскольку эта подобласть односвязна (как и U), то на ней есть однозначная непрерывная ветвь логарифма (возьмем любую), так что образ $l = \ln \circ g_a \circ f$ лежит в левой полуплоскости. Функция $F(z) = \frac{l(z)-l(0)}{l(z)+\overline{l(0)}}$ по прежнему голоморфна, однолистна и переводит 0 в 0 (почему?). Кроме этого, она переведет U в подмножество D.

Отношение модулей производных в нуле $|F'(0)|/|f'(0)|$ можно вычислить (сделайте это), оно равно

$$\frac{1-a^2}{2a\ln(1/a)}.$$

Остается показать, что это число больше 1 при $a \in]0,1[$. Это равносильно тому, что

$$\frac{1-a^2}{a} + 2\ln a$$

положительно на интервале $]0,1[$. Продифференцируем и получим $-\frac{1}{a^2}+2\frac{1}{a}-1 = -(\frac{1}{a}-1)^2$, это отрицательно на интервале $]0,1[$. Следовательно, $\frac{1-a^2}{a}+2\ln a$ убывает на интервале до значения в единице, которое равно нулю. Поэтому на всем интервале величина положительна. Это заканчивает доказательство теоремы.

10. Лекция десятая. 14 апреля

10.1. Гармонические функции. Гармонической функцией будем называть такую бесконечногладкую (и вообще говоря комплексно-значную) функцию f, заданную на открытом множестве $\Omega \subset \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$, что $\Delta f = 0$, где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ – оператор Лапласа. Это определение удручающе зависит от координат. Пока у нас и примеров-то нет, кроме $1, x, y, x^2 - y^2, $. Попробуйте доказать, скажем, что функция $\ln(\sqrt{x^2+y^2})$ гармонична. Впрочем, примеры сейчас появятся.

10.2. Гармонические и голоморфные функции. Вспомним, что

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}) \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}),$$

получим $\Delta = 4\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}$. Откуда любая голоморфная (как и антиголоморфная) функция гармонична, ибо голоморфная функция f лежит в ядре оператора $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$, а следовательно в ядре оператора Лапласа.

Отметим, что функция является гармонической тогда и только тогда, когда ее вещественная и мнимая части гармоничны. Это дает нам много примеров вещественно-значных гармонических функций. Оказывается, этими примерами по сути исчерпываются все гармонические функции. Докажем это.

Итак, – пусть есть вещественнозначная гармоническая функция g в связной односвязной области Ω. Тогда она является вещественной частью некоторой голоморфной функции f, определенной с точностью до константы однозначно. Докажем это.

Рассмотрим дифференциальную форму

$$2\frac{\partial g}{\partial z}dz.$$

Эта форма замкнута, а следовательно в односвязной области имеет первообразную f (которая будет искомой голоморфной функцией f). Поскольку $2\frac{\partial g}{\partial z}dz = df$, следовательно $2\frac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{z}}d\bar{z} = d\bar{f}$ (почему?) и мы получаем

$$d(f+\bar{f}) = 2dg.$$

Следовательно, вещественная часть фунции f равна g с точностью до константы. Если существует другая голоморфная функция f_1, вещественная часть которой равна g, то эта функция отличается от нашей на константу, поскольку вещественная часть $f - f_1$ равна нулю, а это бывает только если $f - f_1$ чисто мнимая константа по принципу сохранения области.

10.3. Теорема о среднем для гармонических функций. Для голоморфной функции справедлива теорема о среднем – значение голоморфной функции в центре круга равно среднему по границе круга. Следовательно, утверждение теоремы о среднем верно и для вещественной и мнимой части этой функции, а следовательно и для любой вещественнозначной гармонической функции. А следовательно и для любой комплекснозначной гармонической функции.

10.4. Принцип максимума для гармонических функций.

10.5. Аналитичность.

10.6. Формула Пуассона. Если голоморфная функция f задана рядом $\sum a_n z^n$, то ее вещественная часть раскладывается в ряд

$$g(re^{i\varphi}) = \frac{1}{2}\sum a_n r^n e^{in\varphi} + \bar{a_n} r^n e^{-in\varphi},$$

который равномерно сходится при r меньше радиуса сходимости исходного ряда. Будем считать a_0 вещественным числом. Тогда получим что

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(re^{i\varphi})d\varphi$$

и при натуральных n

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(re^{i\varphi})r^n e^{-in\varphi}d\varphi.$$

Таким образом, коэффициенты ряда Тейлора голоморфной функции даются интегральными формулами в которых участвует только ее вещественная часть. Подставляя их в ряд для f, видим

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(re^{i\varphi})(1 + 2\sum_{n\geq 1} z^n r^{-n} e^{-in\varphi})d\varphi,$$

где $|z| < r$.

Множитель $1 + 2\sum\limits_{n\geq 1} z^n r^{-n} e^{-in\varphi}$ равен

$$\frac{re^{i\varphi} + z}{re^{i\varphi} - z},$$

и называется ядром Пуассона (1781-1840). Таким образом имеем две интегральные формулы –

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(re^{i\varphi})\frac{re^{i\varphi} + z}{re^{i\varphi} - z}d\varphi$$

и ее вещественную часть

$$g(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(re^{i\varphi})\frac{r^2 - |z|^2}{|re^{i\varphi} - z|^2}d\varphi$$

10.7. Задача Дирихле. Задача Дирихле – это задача о восстановлении гармонической в области функции по граничной функции.

Решение задачи Дирихле для круга при условии непрерывности граничной функции легко угадать при помощи формулы Пуассона. Положим

$$g(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \frac{r^2 - |z|^2}{|re^{i\varphi} - z|^2} d\varphi$$

для непрерывной функции f на окружности. Покажем, что эта функция гармонична внутри открытого круга радиуса r и стремится к $f(\varphi)$ при $z \to re^{i\varphi}$ внутри открытого круга радиуса r.

После того, что формула выписана ее не трудно доказать.

Во-первых эта функция гармонична внутри круга,. Потому что она вещественная часть голоморфной, заданной интегралом, который можно дифференцировать.

Эта функция стремится к f.

Дело тут в поведении (вещественной части) ядра Пуассона. Рассмотрим вещественную часть ядра Пуасссона

$$\frac{r^2 - |z|^2}{|re^{i\varphi} - z|^2}$$

при каждом z ($|z| < r$) это функция на окружности. Как себя ведет это ядро при $z \to re^{i\varphi_0}$? Оказывается, это "дельта-образное"семейство. А именно ядро Пуассона вне любой (фиксированной) окрестности точки φ_0 ядро Пуассона положительно, мало, когда z достаточно близко к $re^{i\varphi_0}$, и его интеграл по всей окружности равен единице. Полезная физическая аналогия – рассмотреть распределенную единичную массу на окружности, распределение зависит от z и при $z \to re^{i\varphi_0}$ стремится к единичной массе, сосредоточенной в точке $re^{i\varphi_0}$