1. ИНДЕКС ПЛОСКОЙ КРИВОЙ.

Во всех задачах этого листка предполагается известным следующее утверждение. Пусть $\mathcal{G}$ — множество замкнутых кривых на плоскости, не проходящих через начало координат, то есть множество непрерывных отображений $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, для которых $\gamma(0) = \gamma(1)$. Тогда существует отображение $\operatorname{ind} : \mathcal{G} \to \mathbb{Z}$ (индекс), обладающее следующими свойствами:

(1) Если $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{G}$ — две кривых, $\gamma_1(1) = \gamma_2(0)$, и кривая $\gamma \in \mathcal{G}$ получается последовательным прохождением сначала γ_1, а потом γ_2 (обозначение: $\gamma = \gamma_1 \cdot \gamma_2$), то $\operatorname{ind}(\gamma) = \operatorname{ind}(\gamma_1) + \operatorname{ind}(\gamma_2)$.
(2) Если $\gamma_s \in \mathcal{G}$ — семейство замкнутых кривых, непрерывно зависящих от параметра $s \in [0,1]$ и не проходящих через начало координат, то индекс $\operatorname{ind}(\gamma_s)$ не зависит от s.
(3) Если $\iota(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$ при $t \in [0,1]$, то $\operatorname{ind}(\iota) = 1$.

Простейшие свойства индекса

Будем говорить, что замкнутые кривые γ_0 и γ_1 *гомотопны*, если существует семейство $\gamma_s \in \mathcal{G}$, непрерывно зависящее от $s \in [0,1]$ (γ_0 и γ_1 — кривые этого семейства при $s = 0$ и $s = 1$ соответственно). Согласно свойству 2 индексы гомотопных кривых совпадают.

Задача 1. Пусть $\epsilon(t) = a \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ при всех $t \in [0,1]$. Докажите, что $\operatorname{ind}(\epsilon) = 0$.

Указание. Докажите, что для произвольной кривой $\gamma \in \mathcal{G}$ кривые γ и $\gamma \cdot \epsilon$ гомотопны, то есть существует семейство $\gamma_s \in \mathcal{G}$, непрерывно зависящих от $s \in [0,1]$ и не проходящих через начало координат, для которого $\gamma_0 = \gamma$, а $\gamma_1 = \gamma \cdot \epsilon$. После этого воспользуйтесь свойствами 1 и 2.

Задача 2. Пусть $\widetilde{\gamma}(t) \overset{\text{def}}{=} \gamma(1-t)$ для всех $t \in [0,1]$. Докажите, что $\operatorname{ind}(\widetilde{\gamma}) = -\operatorname{ind}(\gamma)$.

Указание. Докажите, что кривые $\gamma \cdot \widetilde{\gamma}$ и ϵ гомотопны.

Теорема Брауэра на плоскости

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ — круг единичного радиуса с центром в начале координат, и $F : \Omega \to \Omega$ — непрерывное отображение. Для каждого $r \geq 0$ обозначим $\omega_r(t) = (r\cos 2\pi t, r \sin 2\pi t)$. Также пусть $G(v) \overset{\text{def}}{=} v - F(v)$ и $u_r(t) \overset{\text{def}}{=} G(\omega_r(t))$.

Задача 3. Предположим,что $u_1(t) \neq (0,0)$ при всех $t \in [0,1]$. Докажите, что кривые u_1 и ι (из свойства 3) гомотопны.

Задача 4 (теорема Брауэра на плоскости)**.** Докажите, что отображение F имеет неподвижную точку, то есть существует $a \in \Omega$ такое, что $F(a) = a$.

Указание. Рассмотрите u_r как семейство кривых, непрерывно зависящих от параметра $r \in [0,1]$, и сравните индексы кривых u_0 (задача 1) и u_1 (задача 3).

Основная теорема алгебры

В этом разделе мы отождествляем плоскость $\mathbb{R}^2$ и множество комплексных чисел $\mathbb{C}$. Пусть $P(z) \overset{\text{def}}{=} z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ — многочлен с комплексными коэффициентами. Обозначим $u_r(t) = P(\omega_r(t))$, где ω_r определяется так же, как в разделе про теорему Брауэра выше. Также пусть $w_{r,n}(t) = \omega_r(t)^n$ (возведение комплексного числа в степень n).

Задача 5. а) Докажите, что $w_{1,n} = \iota \cdot \ldots \cdot \iota$ (n “множителей”). б) Докажите, что $\operatorname{ind}(w_{r,n}) = n$ при любом $r > 0$. в) Докажите, что существует число $R > 0$ такое, что при любом $r \geq R$ кривые u_r и $w_{r,n}$ гомотопны.

Указание. Положим $\gamma_s(t) = P_s(\omega_r(t))$, где $P_s(z) = z^n + sa_{n-1}z^{n-1} + \cdots + sa_1 z + sa_0$; тогда $\gamma_0 = w_{r,n}$ и $\gamma_1 = u_r$ Нужно доказать существование R такого, что при $r \geq R$ кривая γ_s с произвольным $s \in [0,1]$ не проходит через начало координат $0 \in \mathbb{C}$.

Задача 6 (основная теорема алгебры)**.** Докажите, что существует комплексное число z такое, что $P(z) = 0$.

Указание. Рассмотрите семейство замкнутых кривых $v_s = u_{sR}$, $s \in [0,1]$, и сравните индексы кривых v_0 и v_1.

Теорема о возах

Пусть Ω — круг из раздела про теорему Брауэра выше, и $a, b : [0,1] \to \Omega$ — две кривые (непрерывные отображения), соединяющих пары диаметрально противоположных точек его границы: $a(0) = (-1, 0)$, $a(1) = (1, 0)$ и $b(0) = (0, -1)$, $b(1) = (0, 1)$. Определим отображение $D : [0,1]^2 \to \mathbb{R}^2$ формулой $D(p, q) = a(p) - b(q)$, $p, q \in [0,1]$. Обозначим $Q_r : [0,1] \to [0,1]^2$ непрерывную кривую, обходящую по периметру (с постоянной скоростью против часовой стрелки) границу квадрата со стороной r ($r \in [0,1]$), центр которого лежит в точке $(1/2, 1/2)$.

Задача 7. Обозначим $u_r(t) = D(Q_r(t))$. Докажите, что $\operatorname{ind}(u_1) = 1$, а $\operatorname{ind}(u_0) = 0$, если соответствующие кривые не проходят через начало координат.

Указание. Как обычно, нужно доказать, что кривая u_1 гомотопна кривой ι из свойства 3.

Задача 8. Докажите, что кривые a и b пересекаются: существуют $p, q \in [0,1]$ такие, что $a(p) = b(q)$.

Задача 9 (теорема о возах)**.** Из города A в город B ведут две дороги. В полдень из города A выезжают две телеги — одна по первой дороге, другая по второй. Телеги связаны друг с другом канатом длиной 10 м. Через два часа телеги благополучно прибывают в город B. В полночь из городов выезжают два круглых воза диаметром 10 м каждый — один из города A в город B по первой дороге, а другой из города B в город A по второй. Докажите, что где-то по дороге возы столкнутся друг с другом.

Теорема о причесывании ежа

Пусть $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ — сфера единичного радиуса с центром в начале координат. Векторным полем на сфере называется непрерывное отображение $X : S^2 \to \mathbb{R}^3$ такое, что для каждой точки $a \in S^2$ сферы ее образ $X(a)$ перпендикулярен a (то есть касается сферы в точке a, если его отложить от точки a).

Пусть $h \in [-1, 1]$. Обозначим $p_h : [0,1] \to S^2$ параллель на широте h, то есть кривую, которая обходит пересечение сферы с плоскостью $z = h$ (это окружность) с постоянной скоростью против часовой стрелки (если смотреть со стороны северного полюса). Обозначим $v_h(t)$ вектор единичной длины, касающийся параллели p_h в точке $p_h(t)$, и пусть $u_h(t)$ — угол между векторами $X(p_h(t))$ и $v_h(t)$. Этот угол мы считаем точкой окружности $S^1 \subset \mathbb{R}^2$; он определен, если $X(p_h(t)) \neq 0$. Тем самым, если векторное поле X не обращается в нуль на параллели p_h, то u_h для такого h — замкнутая кривая на плоскости, не проходящая через начало координат.

Задача 10. а) Пусть $X(0,0,1) \neq 0$. Докажите, что существует такое $\varepsilon > 0$, что при $1 - \varepsilon < h < 1$ кривая u_h определена и ее индекс равен 1. б) Докажите, что если векторное поле X нигде не обращается в нуль, то $\operatorname{ind}(u_h) = 1$ для всех $h \neq \pm 1$.

Пусть $\varphi \in [0, \pi]$. Обозначим теперь q_s кривую, обходящую пересечение окружности с плоскостью, проходящей через начало координат и перпендикулярной вектору $n_\varphi = (\sin\varphi, 0, \cos\varphi)$ (это окружность большого круга) с постоянной скоростью против часовой стрелки, если смотреть со стороны конца вектора n_φ. В частности, $q_0 = p_0$. Определим теперь плоскую кривую v_φ так же, как определялась кривая u_h выше, только вместо кривой p_h будем использовать кривую q_φ. Кривая v_φ определена, если векторное поле X не обращается в нуль в точках кривой q_φ.

Задача 11. Докажите, что $\operatorname{ind} v_\pi = -1$.

Задача 12 (теорема о причесывании ежа)**.** Докажите, что на сфере S^2 существует точка, в которой векторное поле X обращается в нуль.

Указание. Если X нигде не обращается в нуль, то кривые v_φ определены при всех $\varphi \in [0, \pi]$ и, очевидно, непрерывно зависят от φ. Рассмотрите их индексы.

Задача 13. а) Постройте пример векторного поля на сфере, которое обращается в нуль только в одной точке. б) Постройте пример векторного поля на торе, которое нигде не обращается в нуль.