ЛЕКЦИЯ 13

Аннотация. Фундаментальная группа клеточного пространства.

Зафиксируем множество $\mathcal{A}$ (называемое множеством образующих) и пусть $W_{\mathcal{A}}$ — множество конечных слов (включая пустое) $w_1 \dots w_N$, где каждый w_i — либо элемент множества $\mathcal{A}$, либо имеет вид x^{-1}, где $x \in \mathcal{A}$. Произведением слов $w, w' \in \mathcal{A}$, где $w = w_1 \dots w_N$ и $w' = w'_1 \dots w'_M$ называется слово $ww' \stackrel{\text{def}}{=} w_1 \dots w_N w'_1 \dots w'_M \in W_{\mathcal{A}}$.

Два слова $w, w' \in W_{\mathcal{A}}$ называются эквивалентными ($w \sim w'$), если они могут быть получены друг из друга конечным числом вписываний и вычеркиваний пар символов вида xx^{-1} или $x^{-1}x$, где $x \in \mathcal{A}$.

Предложение 1. (1) *Отношение $\sim$ — действительно отношение эквивалентности.*
(2) *Если $w_1 \sim w_2$ и $w'_1 \sim w'_2$, то $w_1 w'_1 \sim w_2 w'_2$.*

Доказательство предложения — легкое упражнение. Из предложения стандартным образом следует, что множество $W_{\mathcal{A}}$ разбивается на классы эквивалентности, и на множестве $F_{\mathcal{A}}$ классов эквивалентности возникает корректно определенное умножение: произведением классов является класс слова ww', где w и w' — произвольные слова, принадлежащие умножаемым классам.

Теорема 1. *Множество $F_{\mathcal{A}}$ образует группу относительно введенной операции умножения.*

Эта группа называется *свободной группой* с множеством образующих $\mathcal{A}$.

Доказательство. Ассоциативность: если $x_1, x_2, x_3 \in F_{\mathcal{A}}$ — классы эквивалентности, а w_1, w_2, w_3 — представляющие их слова, то слово $w_1 w_2$ представляет класс $x_1 x_2$, а слово $w_1 w_2 w_3$ — класс$(x_1 x_2) x_3$. С другой стороны, $w_2 w_3$ — представитель класса $x_2 x_3$, и то же самое слово $w_1 w_2 w_3$ принадлежит классу $x_1(x_2 x_3)$, который тем самым совпадает с $(x_1 x_2) x_3$.

Единичным элементом группы является класс, содержащий пустое слово. Обратным к классу x, содержащему слово $w_1 \dots w_N$, является класс, содержащий слово $w_N^{-1} \dots w_1^{-1}$, где w_i^{-1} — символ x^{-1}, если $w_i = x \in \mathcal{A}$, и $w_i^{-1} = x$, если $w_i = x^{-1}$. □

Пример 1. Пусть $\mathcal{A} = \{x\}$ — множество из одного элемента. Тогда $W_{\mathcal{A}}$ — множество последовательностей из символов x и x^{-1}. Для $w \in W_{\mathcal{A}}$ обозначим $N(w) = N_1(W) - N_2(w)$, где $N_1(w)$ и $N_2(w)$ — количество символов x и x^{-1} в последовательности соответственно. Если в последовательности w добавить или вычеркнуть пару xx^{-1} или $x^{-1}x$, то $N(w)$, очевидно, не меняется. Поэтому если $w \sim w'$, то $N(w) = N(w')$. С другой стороны, как нетрудно видеть, последовательность w эквивалентна последовательности $x^{N(w)}$, если $N(w) \ge 0$, и последовательности $(x^{-1})^{-N(w)}$, если $N(w) \le 0$. Отсюда вытекает, что $w \sim w'$ тогда и только тогда, когда $N(w) = N(w')$.

Очевидно, $N(ww') = N(w) + N(w')$. Отсюда вытекает, что свободная группа $F_{\mathcal{A}}$ с одной образующей изоморфна группе $\mathbb{Z}$ целых чисел по сложению.

В дальнейшем нам понадобятся некоторые сведения о комбинаторике $W_{\mathcal{A}}$ и $F_{\mathcal{A}}$. Назовем слово $w_1 \dots w_N \in W_{\mathcal{A}}$ несократимым, если оно не содержит подслов вида xx^{-1} и $x^{-1}x$ для всех $x \in \mathcal{A}$.

Теорема 2. *Всякий класс эквивалентности $u \in F_{\mathcal{A}}$ содержит ровно одно несократимое слово $w_1 \dots w_N$.*

Доказательство. Самое короткое слово в классе, очевидно, несократимо. Предположим, что в некоторых классах есть несколько несократимых слов, и выберем из всех таких слов (во всех классах!) самое короткое, $w \stackrel{\text{def}}{=} w_1 \dots w_N$. Пусть $w' \stackrel{\text{def}}{=} w'_1 \dots w'_{N'}$ — эквивалентное w несократимое слово, $N' \ge N$. В силу выбора w последние буквы слов не совпадают: $w_N \ne w'_{N'}$; отсюда следует, что слово $x - w(w')^{-1} = w_1 \dots w_N (w'_{N'})^{-1} \dots (w')^{-1}$ также несократимо и эквивалентно пустому (почему?).

Пусть теперь $w = w_1 \dots w_N$ — произвольное слово, эквивалентное пустому. Это означает, что существует последовательность слов $x_1, \dots, x_k$ такая, что $x_1 = \varnothing$, $x_k = w$ и каждое слово x_i отличается от x_{i-1} вписыванием или вычеркиванием пары yy^{-1} или $y^{-1}y$ для некоторого $y \in \mathcal{A}$. Снабдим каждое слово x_i вспомогательными данными — так называемой скобочной структурой. Скобочная структура на слове $y = y_1 \dots y_N$ это разбиение последовательности $y_1, \dots, y_N$ на пары, удовлетворяющее следующим требованиям:

1. Если y_i и y_j — пара, то $y_j = y_i^{-1}$.
2. Элементы двух пар не могут чередоваться: если y_i и y_j — пара, y_k и y_ℓ — другая пара, причем $i < j$ и $k < \ell$, то либо $k < \ell < i < j$, либо $i < j < k < \ell$, либо $i < k < \ell < j$, либо $k < i < j < \ell$.

Построение скобочной структуры на слове x_i проведем индукцией по i: пусть скобочная структура на слове x_{i-1} уже задана. Если x_i получается из x_{i-1} вписыванием фрагмента yy^{-1} или $y^{-1}y$, то объединим y и y^{-1} в пару (а остальные пары оставим, как было). Поскольку y и y^{-1} стоят на соседних местах, новая пара не чередуется ни с какой из имевшихся. Если x_i получается из x_{i-1} вычеркиванием букв y_k и y_{k+1}, образующих пару, то просто удалим эту пару из списка. Если y_k и y_{k+1} пары не образуют, то, согласно условию отсутствия чередования, y_k находится в паре с y_m, а y_{k+1} — с y_ℓ, где $m < k < \ell$; тогда вычеркнем буквы y_k и y_{k+1}, а Y_m и y_ℓ объединим в пару — очевидно, условие отсутствия чередования нарушено не будет.

Тем самым $w = w_1 \dots w_N$ обладает скобочной структурой. Рассмотрим самую "короткую" пару — пару w_i, w_j с наименьшим $|i-j|$. Если $|i-j| > 1$, то между w_i и w_j имеются буквы, которые, согласно условию отсутствия чередования, должны образовывать пары. Но тогда w_i, w_j — не самая короткая пара. Следовательно, $j = i+1$ (или наоборот), но это противоречит несократимости слова w. $\square$

Пусть B — букет окружностей, занумерованных элементами множества $\mathcal{A}$, и $b \in B$ — вершина букета.

Теорема 3 (она же задача 6 листка 7). *$\pi_1(B, b)$ — свободная группа $F_\mathcal{A}$.*

Доказательство. Рассмотрим клеточное пространство $E_\mathcal{A}$, называемое графом Кэли свободной группы. Это граф, вершины которого занумерованы элементами $x \in F_\mathcal{A}$, а ребра — парами элементов (x, y) такими, что $y = xa$ или $y = xa^{-1}$ для некоторой образующей $a \in \mathcal{A}$. При этом концами ребра (x, y) являются элементы x и y. Для каждого ребра зафиксируем отождествление $u_{xy} : [0, 1] \to (x, y)$ с отрезком $[0, 1]$ такое, что $u_{xy}(0) = x$ и $u_{xy}(1) = y$, если $y = xa$. Если $y = xa^{-1}$, то $x = ya$, и тогда $u_{yx}(0) = y$ и $u_{yx}(1) = x$.

Отображение $p : E_\mathcal{A} \to B$ переводит все вершины графа в вершину букета, а ребро (x, y) — в окружность, занумерованную элементом $a \in \mathcal{A}$, где $y = xa$: $p(u_{xy}(t)) = e^{2\pi it}$ на соответствующей окружности.

Докажем, что $p : E_\mathcal{A} \to B$ — накрытие с односвязным накрывающим пространством (т.наз. универсальное — согласно теореме о классификации накрытий такое только одно с точностью до эквивалентности). Возьмем в качестве стандартного слоя $F = F_\mathcal{A}$. Для вершины букета ее тривиализующей окрестностью U будет объединение дуг всех окружостей букета, содержащих вершину и не совпадающих со всей окружностью. Если точка не является вершиной, то она принадлежит ровно одной окружности букета и ее тривиализующей окрестностью U будет любая дуга этой окружности, содержащая точку и не содержащая вершины букета.

В первом случае прообраз $p^{-1}(U) \subset E_\mathcal{A}$ — объединение компонент линейной связности, каждая из которых содержит ровно одну вершину графа; для произвольной $z \in p^{-1}(U)$ положим по определению $\lambda(z) \in F = F_\mathcal{A}$ — вершина, лежащая в одной компоненте связности множества $p^{-1}(U)$ с точкой z. Во втором случае $p^{-1}(U)$ — объединение интервалов, лежащих на ребрах и не содержащих их концов; на каждом ребре вида (x, y), $x = ya$ (где $a \in \mathcal{A}$ — номер окружности, содержащей окрестность U), лежит ровно один такой интервал. Тогда положим по определению $\lambda(z) = x \in F = F_\mathcal{A}$, если z — любая точка интервала, лежащего на ребре (x, y).

Докахательство того, что $(p, \lambda) : p^{-}(U) \to U \times F$ — гомеоморфизм, остается в качестве упражнения.

Докажем линейную связность $E_\mathcal{A}$. Пусть $w = w_1 \dots w_N \in F_\mathcal{A}$ — вершина графа, а $\varnothing$ — другая его вершина, соответствующая единице свободной группы. Тогда точки $\varnothing$ и w можно соединить путем $u_{\varnothing, w_1} \cdot u_{w_1, w_1 w_2} \cdot \dots \cdot u_{w_1 \dots w_{N-1}, w}$. Поскольку любую точку графа (как и всякого клеточного пространства) можно соединить путем с вершиной (нульмерной клеткой), линейная связность доказана.

Докажем односвязность $E_\mathcal{A}$. Для элемента $x \in F_\mathcal{A}$ обозначим $\ell(x) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ его длину — наименьшее k такое, что несократимый элемент в классе эквивалентности x (единственный, согласно теореме 2) содержит k букв: $w = w_1 \dots w_k \in W_\mathcal{A}$. Обозначим Γ_n подграф $E_\mathcal{A}$, состояший из всех вершин $x \in F_\mathcal{A}$, для которых $\ell(x) \leq n$, и соединяющих их ребер. Из теоремы 2 вытекает, что вершина x, у которой $\ell(x) = n$, является "висячей" — в нее входит только одно ребро (x, y), где $\ell(y) = n-1$ (докажите!). Тем же методом, что в задаче 3 листка 6 (стягивание ребер) докажем, что $\Gamma_{n-1} \subset \Gamma_n$ — деформационный ретракт графа Γ_n и, следовательно, гомотопически эквивалентен ему. По индукции получаем, что все графы Γ_n гомотопически эквивалентны графу Γ_0, то есть точке.

Пусть теперь $\gamma : [0, 1] \to E_\mathcal{A}$ — петля, для которой $\gamma(0) = \gamma(1) = v_\varnothing$ — вершина, соответствующая единице группы $F_\mathcal{A}$. Образ $\gamma([0, 1]) \subset E_\mathcal{A}$ компактен и, согласно задаче 5 листка 7, лежит в объединении конечного множества ребер. Следовательно, $\gamma([0, 1]) \subset \Gamma_n$ для некоторого n, а поскольку Γ_n стягиваем, петля γ стягиваема. Этим доказана односвязность $E_\mathcal{A}$.

На множестве $E_\mathcal{A}$ определено действие L свободной группы $F_\mathcal{A}$: если $a \in F_\mathcal{A}$, то $L(a)(u_{xy}(t)) = u_{ax, ay}(t)$. Нетрудно проверить (опять-таки, упражнение), что это на самом деле действие, оно точно дискретно и $z = L(a)z'$ для некоторого $a \in F_\mathcal{A}$ тогда и только тогда, когда $p(z) = p(z')$ (то есть прообразы точек при отображении p — орбиты действия). Отсюда вытекает, что букет B гомеоморфен пространству орбит действия L (фактор-пространству по отношению эквивалентности: $z \sim z'$, если $z' = L(a)z$ для некоторого $a \in F_\mathcal{A}$). Согласно задаче 3б листка 7 отсюда и из односвязности $E_\mathcal{A}$ вытекает, что $\pi_1(B, b) = F_\mathcal{A}$. $\square$

Пусть X — топологическое пространство,$f : S^1 \to X$ — непрерывное отображение, а $p : [0, 1] \to S^1 \subset \mathbb{C}$ задано формулой $p(t) = e^{2\pi it}$; $p(0) = p(1) = 1 \in S^1$. Тогда $f \circ p : [0, 1] \to X$ — петля с началом и концом в точке $c = f(1)$. Ее класс гомотопии принадлежит группе $\pi_1(X, c)$. Если X линейно связно, то группы $\pi_1(X, c)$ и $\pi_1(X, b)$ изоморфны, но изоморфизм определен с точностью до сопряжения. Тем самым отображение f определяет класс сопряженных элементов в группе $\pi_1(X, b)$, который мы обозначим u_f.

Пусть теперь X — линейно связное клеточное пространство с единственной нульмерной клеткой b (согласно задаче из листка 8, всякое линейно связное клеточное пространство гомотопически эквивалентно такому). Пусть $\chi_\alpha^{(2)} : B_2 \to X$ — характеристическое отображение двумерной клетки. Тогда $\chi_\alpha^{(2)}\Big|_{\partial B_2} : S^1 \to \mathrm{sk}_1(X)$ определяет класс сопряженности $u_\alpha \subset \pi_1(\mathrm{sk}_1(X, b))$. Обозначим $H \subset \pi_1(\mathrm{sk}_1(X, b))$ нормальную подгруппу, порожденную объединением всех классов $u_\alpha, \alpha \in I_2$.

Пусть, как в лекции 10–11, $\iota_n : \mathrm{sk}_n(X) \to X$ — тавтологическое вложение.

Теорема 4. $H = \mathrm{Ker}(\iota_1)_*$.

Следствие (теоремы 4 и следствия 2 лекции 12). *Группа* $\pi_1(X, b)$ *изоморфна* $\pi_1(\mathrm{sk}_1(X), b)/H$.

Поскольку $\{b\}$ — единственная нульмерная клетка X, то $\mathrm{sk}_1(X)$ — букет окружностей с вершиной b: каждая окружность — объединение $e_\beta^{(1)} \cup \{b\}$, $\beta \in I_1$. Согласно теореме 3, $\pi_1(\mathrm{sk}_1(X), b)$ — свободная группа, множество образующих которой находятся во взаимно однозначном соответствии с I_1. В каждом классе сопряженности u_α, $\alpha \in I_2$, выберем элемент v_α. Тогда теорема 4 означает, что $\pi_1(X, b)$ — группа, заданная образующими $e_\beta, \beta \in I_1$ и соотношениями $v_\alpha = 1$, $\alpha \in I_2$.

Пример 2 (вычисление ранее известной группы). Рассмотрим клеточное разбиение $\mathbb{R}P^2 = e^{(0)} \cup e^{(1)} \cup e^{(2)}$, как в примере 3 лекции 12. Тогда $\mathrm{sk}_1(\mathbb{R}P^2) = e^{(0)} \cup e^{(1)} = \mathbb{R}P^1$ гомеоморфен S^1, а отображение $\chi^{(2)}\big|_{\partial B_2} : \partial B_2 \to \mathrm{sk}_1(\mathbb{R}P^2)$ — отображение $S^1 \to S^1$ степени 2. Отсюда вытекает, что $\pi_1(\mathbb{R}P^2, b)$ (где $\{b\} = e^{(0)}$ — единственная нульмерная клетка) порождена единственной образующей x (поскольку одномерная клетка $e^{(1)}$ единственна) и соотношением $x^2 = 1$. Тем самым $\pi_1(\mathbb{R}P^2, b) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Как мы видели ранее, отсюда вытекает, что $\pi_1(\mathbb{R}P^n, b) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ при любом $n \geq 2$.

Пример 3 (вычисление ранее неизвестной фундаментальной группы). Пусть M_g — сфера с g ручками и клеточным разбиением, как в примере 6 лекции 12. Тогда $\mathrm{sk}_1(M_g)$ — букет $2g$ окружностей, а класс гомотопии отображения $\chi^{(2g)}\big|_{\partial B_2} : S^1 \to \mathrm{sk}_1(M_g)$ равен, с точностью до сопряженности, $x_1 x_2 z_1^{-1} x_2^{-1} \dots x_{2g-1} x_{2g} z_{2g-1}^{-1} x_{2g}^{-1}$, где x_i — класс отображения степени 1 из S^1 в i-ю окружность букета. Отсюда вытекает, что $\pi_1(M_g, b)$ порождена образующими $x_1, \dots, x_{2g}$ и соотношением $[x_1, x_2] \dots [x_{2g-1}, x_{2g}] = 1$ (где $[y, z] \stackrel{\text{def}}{=} yzy^{-1}z^{-1}$ — называется коммутатором y и z в группе). Это новый результат; в случае $g = 1$ (тор) он совпадает с известным ранее: фундаментальная группа порождена двумя образующими x_1, x_2 и соотношением $x_1 x_2 x^{-1} x_2^{-1} = 1 \Leftrightarrow x_1 x_2 = x_2 x_1$ (образующие перестановочны) — то есть это коммутативная группа $\mathbb{Z}^2$.

Аналогично доказывается, что фундаментальная группа бутылки Клейна порождена двумя образующими a, b и соотношением $abab^{-1} = 1$.