ЛЕКЦИЯ 12

Аннотация. Клеточные пространства: определение, примеры, формулировка теоремы о клеточной аппроксимации.

Клеточные пространства — многомерные аналоги графов. Клеточным пространством называется множество X и набор $\{(e_\alpha^{(k)}, \chi_\alpha^{(k)}) \mid k = 0, 1, \dots; \alpha \in I_k\}$, где I_k — произвольное множество индексов, $e_\alpha^{(k)} \subset X$, а $\chi_\alpha^{(k)} : B_k \to X$ — отображение k-мерного замкнутого шара в X. Множества $e_\alpha^{(k)}$ называются клетками, число k — размерностью клетки $e_\alpha^{(k)}$, а отображение $\chi_\alpha^{(k)}$ называется характеристическим отображением клетки $e_\alpha^{(k)}$. При этом требуется, чтобы набор обладал следующими свойствами:

(1) Клетки $e_\alpha^{(k)} \subset X$ попарно не пересекаются, а их объединение (по всем k и всем $\alpha \in I_k$) — все множество X.
(2) Если $k > 0$, то ограничение отображения $\chi_\alpha^{(k)}$ на внутренность $\operatorname{int} B_k$ — биекция $\operatorname{int} B_k \to e_\alpha^{(k)}$.
(3) Если $k > 0$, то образ $\chi_i^{(k)}(\partial B_k)$ границы шара лежит в объединении конечного числа клеток, размерности которых меньше k.

Подчеркнем, что ограничение характеристического отображения на границу шара не обязано быть биекцией. Множества I_k клеток данной размерности k могут иметь любую мощность (конечную или бесконечную), а также могут быть пустыми (необязательно существуют клетки всех размерностей). Объединение $\mathrm{sk}_n(X) = \bigsqcup_{k \le n} \bigsqcup_{\alpha \in I_k} e_\alpha^{(k)}$ называется n-остовом клеточного пространства X. Если $\mathrm{sk}_n(X) = X$, но $\mathrm{sk}_{n-1}(X) \ne X$ (то есть наибольшая размерность клетки в X равна n), то говорят, что X — n-мерное клеточное пространство; если такого n не существует (в X имеются клетки сколь угодно больших размерностей), то X называется бесконечномерным.

Клеточным подпространством X называется подмножество $Y \subset X$, обладающее таким свойством: если $e_\alpha^{(k)} \cap Y \ne \varnothing$, то $\chi_\alpha^{(k)}(B_k) \subset Y$ (в частности, $e_\alpha^{(k)} \subset Y$, то есть подпространство это объединение некоторых клеток X). Очевидно, клеточное подпространство само является клеточным пространством по отношению к характеристическим отображениям вошедших в него клеток.

В клеточном пространстве имеется стандартная топология — проективная топология относительно всех характеристических отображений $\chi_\alpha^{(k)}$, $k \ge 0$, $i \in I_k$. Гомеоморфизм между топологическим пространством Y и клеточным пространством называется клеточным разбиением Y.

Пример 1. $X = S^n = \{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_0^2 + \dots + x_n^2 = 1\} = e^{(0)} \cup e^{(n)}$, где $e^{(0)} = \{(1, 0, \dots, 0)\}$, а $e^{(n)} = S^n \setminus e^{(0)}$. Характеристическое отображение клетки $e^{(0)}$ — отображение точки в точку (это так всегда при $k = 0$), а характеристическое отображение $\chi^{(n)} : B_n \to S^n$, где $B_n = \{(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n \mid y_1^2 + \dots + y_n \le 1\}$, задано формулой $\chi^{(n)}(y_1, \dots, y_n) = (-\cos(\pi y), y_1 \frac{\sin(\pi y)}{y}, \dots, y_n \frac{\sin(\pi y)}{y})$, где $y = \sqrt{y_1^2 + \dots + y_n^2}$ (а функция $\frac{\sin(\pi t)}{t}$ продолжается в точку $t = 0$ по непрерывности). Внутренность B_n переходит взаимно однозначно в $e^{(n)}$ — обратное отображение $e^{(n)} \to \operatorname{int} B_n$ задается, как несложно посчитать, формулами $y_i = \frac{\arccos x_0}{\pi\sqrt{1-x_0^2}} x_i$, $i = 1, \dots, n$. Граница $\partial B_n = \{(y_1, \dots, y_n) \mid y_1^2 + \dots + y_n^2 = 1\}$ переходит в клетку (точку) $e^{(0)}$.

Остов $\mathrm{sk}_i(X) = e^{(0)}$ при $0 \le i \le n-1$ и $\mathrm{sk}_i(X) = X$ при $i \ge n$; пространство n-мерно.

Пример 2. Другое клеточное разбиение S^n: для каждого $k = 0, \dots, n$ положим $e_+^{(k)} = \{(x_0, \dots, x_k, 0, \dots, 0) \in S^n, x_k > 0\}$ и $e_-^{(k)} = \{(x_0, \dots, x_k, 0, \dots, 0) \in S^n, x_k < 0\}$; характеристические отображения $\chi_\pm^{(k)} : B_k \to S^n$ заданы формулой $\chi_\pm^{(k)}(y_1, \dots, y_k) = (y_1, \dots, y_k, \pm\sqrt{1 - (y_1^2 + \dots + y_n^2)}, 0, \dots, 0)$. Ограничение $\chi_\pm^{(k)}\big|_{\operatorname{int} B_k} : \operatorname{int} B_k \to e_\pm^{(k)}$ — биекция: обратное отображение $e_\pm^{(k)} \to \operatorname{int} B_k$ задается, очевидно, формулой $(x_0, \dots, x_k, 0, \dots, 0) \mapsto (x_0, \dots, x_{k-1})$.

Очевидно, $\mathrm{sk}_k(S^n) = \{(x_0, \dots, x_n) \mid x_{k+1} = \dots = x_n = 0\} = S^k$ при $k \le n$; пространство n-мерно.

Пример 3. Клеточное разбиение $\mathbb{R}P^n$: пусть $p : S^n \to \mathbb{R}P^n$ — стандартное двулистное накрытие. Тогда $e^{(k)} \stackrel{\text{def}}{=} p(e_+^{(k)}) = p(e_-^{(k)})$, где $e_+^{(k)}, e_-^{(k)} \subset S^n$ — k-мерные клетки из примера 2. Нетрудно проверить, что $p\big|_{e_\pm^{(k)}} : e_\pm^{(k)} \to e^{(k)}$ — гомеоморфизм, так что $e^{(k)}$ гомеоморфна B_k. Характеристическое отображение клетки $e^{(k)}$ это $\chi^{(k)} = p \circ \chi_+^{(k)} = p \circ \chi_-^{(k)} : B_k \to \mathbb{R}P^n$.

Остов $\mathrm{sk}_k(\mathbb{R}P^n) = \mathbb{R}P^k$, $0 \le k \le n$; пространство n-мерно.

Нужно, разумеется, доказать, что в приведенных выше примерах действительно определены клеточные разбиения, т.е. что топология в S^n или $\mathbb{R}P^n$, проективная относительно характеристических отображений, совпадает со стандартной. Мы оставим это доказательство в качестве упражнения (листок 8).

Пример 4. Клеточное разбиение шара B_n: n-мерная клетка $e^{(n)} = \operatorname{int}(B_n)$, а граница $\partial B_n = S^{n-1}$ разбивается на 2 клетки (размерностей $n-1$ и 0), как в примере 1. Характеристическое отображение клетки $e^{(n)}$ — тождественное отображение шара B_n в себя.

Пример 5. Одномерное клеточное пространсво (т.е. клеточное пространство с клетками размерности 0 и 1) называется графом — подчеркнем, что необязательно конечным.

Пример 6. Сфера с g ручками M_g определяется как правильный $4g$-угольник $N_{4g} \subset \mathbb{R}^2$, стороны которого (занумерованные по циклу $c_1, \dots, c_{4g}$) склеиваются, как описано в листке 3. Таким образом получается клеточное разбиение M_g. Оно имеет одну двумерную клетку e_2 — внутренность многоугольника — характеристическое отображение которой есть $\chi_2 = p \circ h$; здесь $h : B_2 \to N_{4g}$ — гомеоморфизм круга и многоугольника, переводящий границу в границу, а $p : N_{4g} \to M_g$ — отображение склейки. Кроме того, в M_g имеются одномерные клетки $e_1^{(1)}, \dots, e_{2g}^{(1)}$, где $e_i^{(1)}$ — образ внутренностей двух склеиваемых сторон при отображении $p : N_{4g} \to M_g$; характеристические отображения $\chi_i^{(1)}$ очевидны. Единственная нульмерная клетка — образ при отображении p всех вершин многоугольника N_{4g} (они все склеиваются при факторизации — проверьте!).

Остов $\mathrm{sk}_0(M_g)$ — точка, $\mathrm{sk}_1(M_g)$ — вложенный в поверхность граф с одной вершиной и $2g$ ребрами-петлями (образ границы многоугольника при склейке); $\mathrm{sk}_2(M_g) = M_g$ (пространство двумерно).

Аналогично строится клеточное разбиение проективной плоскости, ленты Мебиуса, бутылки Клейна и других поверхностей (с краем и без), склеиваемых из многоугольников.

Пример 7. Клеточное разбиение $X = \mathbb{R}$: нульмерными клетками являются $e_k^{(0)} = \{k\}$, а одномерными $e_k^{(1)} = (k, k+1)$, $k \in \mathbb{Z}$. Характеристические отображения $\chi_k^{(1)} : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ задаются формулами $\chi_k^{(1)}(t) = (t+1)/2 + k$. Пространство $\mathbb{R}$ гомеоморфно одномерной клетке, но, несмотря на это, у него нет клеточных разбиений, состоящих из конечного количества клеток — нетрудно показать (листок 8), что пространства с таким клеточным разбиением обязательно компактны.

Пример 8. Пространство S^∞ состоит из всех последовательностей $(x_0, x_1, \dots)$, все члены которых, кроме конечного числа (своего для каждой последовательности) равны нулю, и $x_0^2 + x_1^2 + \dots = 1$. Пространство разбивается на клетки $S^\infty = \bigsqcup_{k=0}^\infty (e_+^{(k)} \sqcup e_-^{(k)})$, где клетки $e_\pm^{(k)}$ и их характеристические отображения задаются теми же формулами, что и в примере 2. Таким образом, $\mathrm{sk}_n(S^\infty) = S^n$ для всех $n = 0, 1, 2, \dots$; пространство бесконечномерно.

В отличие от предыдущих примеров, в множестве S^∞ нет никакой стандартной топологии, и мы можем только *определить* топологию в нем как клеточную.

Отображение $f : X \to Y$ между двумя клеточными пространствами называется клеточным, если оно непрерывно (в клеточной топологии обоих пространств) и $f(\mathrm{sk}_n(X)) \subset \mathrm{sk}_n(Y)$ для всякого n.

Теорема 1 (о клеточной аппроксимации). *Пусть X и Y — клеточные пространства, $Z \subset X$ — клеточное подпространство, а $f_0 : X \to Y$ — непрерывное отображение, ограничение которого $f_0|_Z : Z \to Y$ на подпространство Z — клеточное отображение. Тогда существует гомотопия $f_t : X \to Y$ ($0 \le t \le 1$) такая, что отображение $f_1 : X \to Y$ клеточное и $f_t(z) \equiv f_0(z)$ (не зависит от t) для всех $z \in Z$, $t \in [0, 1]$.*

Прежде чем доказывать теорему, извлечем из нее несколько следствий.

Следствие 1. *Клеточное пространство X линейно связно тогда и только тогда, когда его 1-остов линейно связен.*

Доказательство. Пусть $a \in e_\alpha^{(n)}$, $a = \chi_\alpha^{(n)}(x)$, где $x \in B_n$. Пусть $\gamma : [0, 1] \to B_n$ соединяет точку $x = \gamma(0)$ с точкой $\gamma(1) \in \partial B_n$. Тогда кривая $\chi_\alpha^{(n)} \circ \gamma : [0, 1] \to X$ соединяет точку a с точкой $\chi_\alpha^{(n)}(\gamma(1)) \in \mathrm{sk}_{n-1}(X)$. Продолжая так по индукции, получим кривую, соединяющую a с точкой 1-остова X. Поэтому если $\mathrm{sk}_1(X)$ линейно связен, то и X линейно связно.

Обратно, пусть X линейно связно, и пусть $a, b \in \mathrm{sk}_0(X)$ (то есть являются нульмерными клетками). В силу связности существует непрерывное отображение $\gamma_0 : [0, 1] \to X$, для которого $\gamma_0(0) = a$, $\gamma_0(1) = b$. Отрезок имеет клеточное разбиение $[0, 1] = \{0\} \cup \{1\} \cup (0, 1)$, и на $\mathrm{sk}_0([0, 1]) = \{0, 1\}$ отображение γ_0 клеточно. По теореме о клеточной аппроксимации существует гомотопия $\gamma_t : [0, 1] \to X$, $0 \le t \le 1$ такая, что $\gamma_t(0) = a$, $\gamma_t(1) = b$ при всех t, а γ_1 клеточно, т.е. $\gamma_1 : [0, 1] \to \mathrm{sk}_1(X)$. Тем самым две произвольные нульмерные клетки a и b можно соединить кривой (γ_1) в 1-остове, откуда и вытекает (как?), что $\mathrm{sk}_1(X)$ линейно связен. □

Пусть X — клеточное пространство, $\iota_n : \mathrm{sk}_n(X) \to X$ — тавтологическое вложение (каждой точке остова сопоставляется она сама, но уже как точка X). Отображение ι_n непрерывно (почему?), так что для произвольной точки $b \in \mathrm{sk}_n(X)$ возникает гомоморфизм фундаментальных групп $(\iota_n)_* : \pi_1(\mathrm{sk}_n(X), b) \to \pi_1(X, b)$.

Следствие 2. *Если пространство X линейно связно, то отображение $(\iota_1)_*$ — эпиморфизм, а $(\iota_n)_*$ при произвольном $n \ge 2$ — изоморфизм. Тем самым для любой нульмерной клетки $\{b\} \subset X$ группа $\pi_1(X, b)$ изоморфна $\pi_1(\mathrm{sk}_2(X), b)$ (а также $\pi_1(\mathrm{sk}_3(X), b)$, $\pi_1(\mathrm{sk}_4(X), b)$ и т.д.) и является фактор-группой группы $\pi_1(\mathrm{sk}_1(X), b)$.*

Доказательство. Рассмотрим у $[0, 1]$ клеточное разбиение, как в следствии 1. По теореме о клеточной аппроксимации любая петля $\gamma : [0, 1] \to X$, $\gamma(0) = \gamma(1) = b$, гомотопна петле $\delta : [0, 1] \to \mathrm{sk}_1(X)$, причем гомотопия неподвижна на нульмерных клетках, т.е. является гомотопией с фиксированными концами. Отсюда вытекает, что любая петля в X гомотопна с фиксированными концами петле в $\mathrm{sk}_1(X)$, что и означает, что $(\iota_1)_*$ — эпиморфизм.

Обозначим теперь ι_{kn} тавтологическое вложение $\mathrm{sk}_k(X) \to \mathrm{sk}_n(X)$, $k \le n$. Тогда $\iota_k = \iota_n \circ \iota_{kn}$, откуда $(\iota_k)_* = (\iota_n)_* \circ (\iota_{kn})_* : \pi_1(\mathrm{sk}_k(X), b) \to \pi_1(X, b)$. Как доказано выше, $(\iota_1)_*$ и $(\iota_{1n})_*$ при любом n — эпиморфизмы; отсюда следует, что $(\iota_n)_*$ — также эпиморфизм.

Докажем, что ядро эпиморфизма $(\iota_2)_* : \pi_1(\mathrm{sk}_2(X), b) \to \pi_1(X, b)$ тривиально, т.е. он является изоморфизмом. Пусть $\gamma : [0,1] \to \mathrm{sk}_1(X)$, $\gamma(0) = \gamma_1(b)$ — петля, класс гомотопии которой принадлежит ядру отображения $(\iota_1)_*$. Это означает, что существует гомотопия петель — непрерывное отображение $\Gamma_0 : [0,1]^2 \to X$, для которого $\Gamma_0(t,0) = \gamma(t)$, $\Gamma_0(t,1) = b$, $\Gamma_0(0,s) = \Gamma_0(1,s)$. Рассмотрим стандартное клеточное разбиание квадрата $[0,1]^2$: нульмерные клетки — углы, одномерные — внутренности сторон, двумерная клетка — внутренность квадрата. Тогда отображение Γ_0 — клеточное на $\mathrm{sk}_1([0,1]^2)$; согласно теореме о клеточной аппроксимации, существует отображение $\Gamma_1 : [0,1]^2 \to X$ (гомотопное Γ_0, но это сейчас неважно), совпадающее с Γ_0 на границе квадрата и клеточное, т.е. образ которого целиком лежит в $\mathrm{sk}_2(X)$. Это отображение Γ_1 является гомотопией петель в $\mathrm{sk}_2(X)$, стягивающей петлю γ в точку. Тем самым доказано, что всякий элемент ядра $(\iota_1)_*$ принадлежит также и ядру $(\iota_{12})_*$.

Пусть теперь $x \in \mathrm{Ker}(\iota_2)_*$. Существует $y \in \pi_1(\mathrm{sk}_1(X), b)$ такой, что $(\iota_{12})_*(y) = x$ (поскольку $(\iota_{12})_*$ — эпиморфизм). Но тогда $(\iota_1)_*(y) = (\iota_2)_*((\iota_{12})_*(y)) = (\iota_2)_*(x) = 1$, то есть $y \in \mathrm{Ker}(\iota_1)_*$. По доказанному, $y \in \mathrm{Ker}(\iota_{12})_*$, то есть $x = (\iota_{12})_*(y) = 1$. Тем самым ядро $(\iota_2)_*$ тривиально, и $(\iota_2)_*$ — изоморфизм.

Из равенства $(\iota_2)_* = (\iota_n)_*(\iota_{2n})_*$ $(n \ge 2)$ и только что доказанного факта, что $(\iota_2)_*$ и $(\iota_{2n})_*$ — изоморфизмы, вытекает, что $(\iota_n)_*$ — также изоморфизм. □