ЛЕКЦИИ 10 И 11

Аннотация. Категория накрытий эквивалентна категории подгрупп фундаментальной группы базы.

Назовем накрытием с отмеченной точкой пару, состоящую из накрытия (E, B, p, F) с линейно связным пространством E (тогда $B = p(E)$ тоже линейно связно) и точки $a \in E$. Морфизмом из накрытия (E_1, B, p_1, F_1) с отмеченной точкой a_1 в накрытие (E_2, B, p_2, F_2) (с той же базой B!) с отмеченной точкой a_2 назовем непрерывное отображение $f : E_1 \to E_2$ такое, что $p_2 \circ f = p_1$ и $f(a_1) = a_2$.

Пример 1. Пусть $p_n : S^1 \to S^1$ — n-листное накрытие, заданное формулой $p_n(z) = z^n$ (ср. пример 5 лекции 8); отмеченная точка $1 \in S^1$. Пусть также $p_0 : \mathbb{R} \to S^1$ — накрытие, заданное формулой $p_0(t) = e^{2\pi it}$; отмеченная точка $0 \in \mathbb{R}$. Отображение $f : \mathbb{R} \to S^1$, заданное формулой $f(t) = e^{2\pi it/n}$ — морфизм из накрытия p_0 в накрытие p_n. Если m делится на n, то отображение $f : S^1 \to S^1$, заданное формулой $f(z) = z^{m/n}$ — морфизм из накрытия p_m в накрытие p_n.

Пусть теперь B — линейно связное пространство, и $b \in B$. Обозначим $\mathbf{Cover}_{B,b}$ категорию, объекты которой — накрытия (E, B, p, F) с базой B, линейно связным накрывающим пространством E и отмеченной точкой $a \in E$ такой, что $p(a) = b$. Морфизмы категории $\mathbf{Cover}_{B,b}$ — морфизмы накрытий с отмеченной точкой, композиция — композиция отображений. Нетрудно видеть, что это действительно категория: ассоциативность композиции имеет место для любых отображений, а тождественное отображение — тождественный морфизм.

Теорема 1. *Пусть p_1, p_2 — два объекта категории $\mathbf{Cover}_{B,b}$ (т.е. накрытия с линейно связными накрывающими пространствами и отмеченными точками, проектирующимися в b).*

1. *Морфизм из p_1 в p_2 существует тогда и только тогда, когда имеет место включение $(p_1)_*(\pi_1(E_1, a_1)) \subseteq (p_2)_*(\pi_1(E_2, a_2)) \subset \pi_1(B, b)$.*
2. *Если морфизм существует, то он единственный.*

Доказательство. Пусть $f : E_1 \to E_2$ — морфизм накрытий: $p_2 \circ f = p_1$, $f(a_1) = a_2$. Тогда $(p_1)_*(\pi_1(E, a_1)) = (p_2 \circ f)_*(\pi_1(E, a_1)) = (p_2)_*(f_*(\pi_1(E, a_1))) \subseteq (p_2)_*(\pi_1(E_2, a_2))$ — включение имеет место.

Обратно, пусть $(p_1)_*(\pi_1(E_1, a_1)) \subseteq (p_2)_*(\pi_1(E_2, a_2))$, и пусть $d \in E_1$ — произвольная точка. Рассмотрим какой-нибудь элемент $u \in P_{E_1}(a_1, d)$ (он существует ввиду линейной связности E_1); тогда $(p_1)_* u \in P_B(b, p_1(d))$. Положим $f(d) \stackrel{\text{def}}{=} \nu_2[(p_1)_* u](a_2) \in E_2$, где (напомним) $\nu_2[(p_1)_* u] : p_2^{-1}(p_1(a_1)) \to p_2^{-1}(p_1(d))$ — отображение поднятия в накрытии p_2. Построенное отображение $f : E_1 \to E_2$ корректно определено: если $u' \in P_{E_1}(a_1, d)$ — другой элемент, то $u' = (u' \cdot u^{-1}) \cdot u$, где $u' \cdot u^{-1} \in \pi_1(E_1, a_1)$, откуда $(p_1)_* u' = (p_1)_*(u' \cdot u^{-1}) \cdot (p_1)_* u$. Элемент $(p_1)_*(u' \cdot u^{-1}) \in \pi_1(B, b)$ принадлежит $(p_1)_*(\pi_1(E_1, a_1)) \subset (p_2)_*(\pi_1(E_2, a_2))$, откуда в силу леммы 2 лекции 9 получается $\nu_2[(p_1)_* u'](a_2) = \nu_2[(p_1)_* u](a_2)$. Равенства $p_1 = p_2 \circ f$ и $f(a_1) = a_2$ выполнены по построению. Непрерывность f вытекает из равенства $p_1 = p_2 \circ f$ и того факта, что отображения p_1 и p_2 (как и любые накрытия) — локальные гомеоморфизмы (почему?). Тогда для любой точки $d \in E_1$ существует окрестность $V \subset E_2$ точки $f(d)$ такая, что $p_2|_V : V \to p_2(V)$ — гомеоморфизм. Выберем теперь произвольную окрестность $U \subset E_1$ точки d такую, что $p_1(U) \subset p_2(V)$ и $p_1|_U : U \to p_1(U)$ — гомеоморфизм. Тогда в окрестности U (включая точку d) отображение $f = p_2^{-1} \circ p_1$ — непрерывно. Тем самым доказано утверждение 1.

Утверждение 2: пусть, как ранее, $f : E_1 \to E_2$ — морфизм накрытий, а $d \in E_1$ — произвольная точка. Поскольку E_1 линейно связно, множество $P_{E_1}(a_1, d)$ непусто; пусть $v \in P_{E_1}(a_1, d)$. Поскольку $a_2 = f(a_1)$, имеем $w = f_* v \in P_{E_2}(a_2, f(d))$. Имеем $(p_2)_* w = (f \circ p_2)_* v = (p_1)_* v$, то есть w — поднятие класса $(p_1)_* v \in P_B(b, p_1(d))$, начинающееся в точке a_2. Согласно свойству поднятия пути (следствие 1 лекции 9), точка $\nu_2[(p_1)_* v](a_2) = f(d)$ существует и единственна. Посколку $d \in E_1$ — произвольная точка, отображение f также единственно. □

Напомним, что любое множество X с частичным упорядочением $\leq$ обладает стандартной структурой категории: элементы множества — ее объекты, а множество морфизмов $\mathrm{Mor}_X(a, b)$ состоит из одного элемента φ_{ab}, если $a \leq b$, и пусто в противном случае. Композиция задана правилом $\varphi_{bc} \circ \varphi_{ab} = \varphi_{ac}$ (φ_{ac} существует, поскольку из $a \leq b \leq c$ вытекает $a \leq c$). В частности, для любой группы G мы рассмотрим категорию $\mathbf{Sub}_G$, объекты которой — подгруппы $H \subset G$, частично упорядоченные по включению.

Сопоставим объекту $p : E \to B$ категории $\mathbf{Cover}_{B,b}$ подгруппу $\mathcal{G}(p) \stackrel{\text{def}}{=} p_*(\pi_1(E, a)) \subset \pi_1(B, b)$ — объект категории $\mathbf{Sub}_{\pi_1(B,b)}$. Из теоремы 1 вытекает, что если между объектами p_1 и p_2 существует морфизм, то он единственный (обозначим его f) и $\mathcal{G}(p_1) \subset \mathcal{G}(p_2)$ — то есть между объектами $\mathcal{G}(p_1)$ и $\mathcal{G}(p_2)$ категории

$\mathbf{Sub}_{\pi_1(B,b)}$ также существует единственный морфизм. Обозначим этот морфизм $\mathcal{G}(f)$; тогда, очевидно, $\mathcal{G}$ превращается в функтор из категории $\mathbf{Cover}_{B,b}$ в категорию $\mathbf{Sub}_{\pi_1(B,b)}$.

Топологическое пространство X называется односвязным, если оно линейно связно и его фундаментальная группа тривиальна.

Лемма 1. *Для любых двух точек $a, b \in X$ односвязного пространства X множество $P_X(a, b)$ состоит из одного элемента.*

Доказательство. X линейно связно, так что $P_X(a, b)$ непусто. Если $u_1, u_2 \in P_X(a, b)$, то $u_1 \cdot u_2^{-1} \in P_X(a, a) = \pi_1(X, a) = \{1\}$, откуда $u_1 = u_2$. □

Теорема 2. *Пусть B линейно связно и локально односвязно: для любой точки $b \in B$ и любого открытого подмножества $U \subset B$, $b \in U$, существует односвязное открытое подмножество V такое, что $b \in V \subset U$. Тогда функтор $\mathcal{G}$ из $\mathbf{Cover}_{B,b}$ в $\mathbf{Sub}_{\pi_1(B,b)}$ представляет собой эквивалентность категорий.*

Доказательство. Множества $\mathrm{Mor}(a, b)$ в обеих категориях для любых двух объектов либо пусты, либо состоят из одного элемента. Из теоремы 1 следует, что $\mathrm{Mor}_{\mathbf{Cover}_{B,b}}(p_1, p_2)$ непусто тогда и только тогда, когда $\mathrm{Mor}_{\mathbf{Sub}[\pi_1(B,b)]}(\mathcal{G}(p_1), \mathcal{G}(p_2))$ непусто; следовательно, $\mathcal{G}$ — биекция на множествах морфизмов.

Морфизм категории $\mathbf{Sub}_G$ обратим только если он тождественный; поэтому два объекта эквивалентны только если они совпадают. Тем самым для доказательства теоремы нужно для произвольной подгруппы $G \subset \pi_1(B, b)$ построить накрытие $p : E \to B$ с отмеченной точкой $a \in E$, $p(a) = b$, такое, что $p_*(\pi_1(E, a)) = G$.

Для доказательства нам потребуются два определения и техническая лемма. Пусть E и B — топологические пространства, $p : E \to B$ — непрерывное отображение. Будем говорить, что p *обладает свойством поднятия пути*, если для всяких двух точек $b, c \in B$, произвольного класса гомотопии путей $u \in P_B(b, c)$ и произвольной точки $a \in p^{-1}(b)$ существует единствнная точка $d \in E$ и единственный класс гомотопии путей $v \in P_E(a, d)$ такой, что $p_*v = u$. Следствие 1 лекции 9 утверждает, что все накрытия обладают свойством поднятия пути.

Лемма 2. *Существует односвязное пространство E и непрерывное отображение $p : E \to B$, обладающее свойством поднятие пути и являющееся локальным гомеоморфизмом.*

Лемму мы докажем позднее, а сейчас выведем из нее теорему. Пусть $U \subset B$ — открытое односвязное подмножество, и пусть $V \subset p^{-1}(U)$ — компонента линейной связности прообраза U. Из свойства поднятия пути вытекает, что для всякой точки $c \in U$ множество V содержит ровно одну точку d из прообраза $p^{-1}(c)$. Действительно, если таких точек две, d_1 и d_2, то пусть $u \in P_V(d_1, d_2)$ (единственный класс гомотопии путей в U, соединяющих d_1 и d_2). Тогда $p_*u \in \pi_1(U, c) = \{1\}$, откуда по свойству поднятия пути получаем $d_1 = d_2$. Тем самым ограничение $p|_V : V \to U$ — непрерывная биекция. С другой стороны, поскольку p — локальный гомеоморфизм, он переводит открытые множества в открытые (докажите!); отсюда вытекает, что $p|_V : V \to U$ — гомеоморфизм. Кроме того, поскольку $p : E \to B$ — локальный гомеоморфизм, каждая компонента линейной связности множества $p^{-1}(U)$ открыта (проверьте!).

Как выясняется, отображение $p : E \to B$ решает задачу в случае, когда подгруппа $G \subset \pi_1(B, b)$ тривиальна. Действительно, выберем точку $a \in E$, для которой $p(a) = b$. Согласно лемме 1 для произвольной точки $x \in E$ множество $P_E(a, x)$ состоит из единственного элемента; обозначим его $u[a, x]$ или, короче, $u[x]$. В частности, для произвольной точки $d \in p^{-1}(b)$ элемент $u[d]$ является поднятием класса гомотопии петель $\lambda(d) \stackrel{\mathrm{def}}{=} p_*(u[d]) \in \pi_1(B, b)$. Поскольку p обладает свойством поднятия пути (включая петли), точка d определяется элементом $p_*(u[d])$ фундаментальной группы однозначно. Тем самым соответствие $\lambda : p^{-1}(b) \to \pi_1(B, b)$ — биекция.

Пусть теперь $c \in B$ произвольна, а $U \subset B$ — односвязное открытое множество, $c \in U$. Выберем компоненту линейной связности V_0 множества $p^{-1}(U)$. Для любой точки $x \in p^{-1}(U)$ существует ровно одна точка $x_0 \in V_0$ такая, что $p(x) = p(x_0)$. Согласно свойству поднятия пути, существует единственная точка $e \in p^{-1}(b)$ и класс гомотопии путей $w \in P_E(x, e)$ такой, что $p_*w = p_*u[x_0]^{-1}$; положим по определению $\lambda(x) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \lambda(e) \in \pi_1(B, b)$. Тем самым λ продолжено до отображения $p^{-1}(U) \to \pi_1(B, b)$. Как нетрудно убедиться (проделайте!), отображение λ постоянно на компонентах линейной связности множества $p^{-1}(U)$. Поскольку эти компоненты открыты, λ непрерывно (как отображение из $p^{-1}(U) \subset E$ в $\pi_1(B, b)$, наделенное дискретной топологией). Прообраз $\lambda^{-1}(m)$ каждой точки $m \in \pi_1(B, b)$ — компонента связности множества $p^{-1}(U)$, ограничение p на которую — гомеоморфмзм на множество U. Это означает, что (p, λ) — гомеоморфизм $p^{-1}(U) \to U \times \pi_1(B, b)$, и (E, B, p) — накрытие со слоем $\pi_1(B, b)$ и односвязным E. Это доказывает теорему для случая тривиальной подгруппы $G = \{1\} \subset \pi_1(B, b)$.

Пусть теперь $G \subset \pi_1(B, b)$ — произвольная подгруппа. Определим на E отношение: $x \sim_G y$, если $p(x) = p(y)$ и $\lambda(x)\lambda(y)^{-1} \in G$; легко проверить, что это отношение эквивалентности. Положим $E_G \stackrel{\mathrm{def}}{=} E/\sim_G$ и наделим E_G фактор-топологией; пусть $\psi_G : E \to E_G$ — стандартная проекция (каждый элемент переходит в класс эквивалентных ему), и пусть $a_G \stackrel{\mathrm{def}}{=} \psi_G(a)$ (класс эквивалентности, содержащий точку a).

Для произвольного класса эквивалентности $z \in E/\sim_G$ положим $p_G(z) \stackrel{\mathrm{def}}{=} p(x)$, где $x \in E$ — произвольный представитель этого класса; таким образом, $p_G \circ \psi_G = p$. Также определим $\lambda_G(z) \in \pi_1(B, b)/G$ как класс смежности (левый), содержащий элемент $\lambda(x) \in \pi_1(B,b)$. Так же, как и в случае $G = \{1\}$, доказывается, что для односвязного открытого $U \subset B$ отображение $(p_G, \lambda_G) : p_G^{-1}(U) \to U \times (\pi_1(B,b)/G)$ — гомеоморфизм и, следовательно, $p_G : E_G \to B$ — накрытие со слоем $\pi_1(B,b)/G$.

Пусть $v \in \pi_1(B,b)$ — класс гомотопии петель, а $u[c] \in P_E(a,c)$ — его поднятие в накрытие $p : E \to B$; по определению $\lambda(c) = v$ Тогда $(p_G)_*((\psi_G)_* u[c]) = p_* u[c] = v$, так что $(\psi_G)_* u[c] \in P_{E_G}(a_G, d)$ — поднятие v в накрытие $p_G : E_G \to B$. Элемент v принадлежит образу $(p_G)_*(\pi_1(E_G, a_G))$ тогда и только тогда, когда его поднятие — петля, то есть $d = a_G$, иными словами $\lambda_G(\psi_G(c)) = G$ (подгруппа G — класс смежности по ней же, содержащий единицу группы). По определению отображения λ_G это эквивалентно тому, что $\lambda(c) \in G$. Отсюда вытекает, что $p_*(\pi_1(E,a)) = G$, так что нужное накрытие построено. Это заканчивает доказательство теоремы в общем случае. $\square$

Доказательство леммы 2. Возьмем в качестве E дизъюнктное объединение $E = \bigsqcup_{c \in B} P_B(b,c)$; также по определению $p(u) = c$, если $u \in P_B(b,c) \subset E$. Мы должны ввести в E топологию, доказать его односвязность и что p — локальный гомеоморфизм, обладающий свойством поднятия пути.

Пусть $c \in B$, $u \in P_B(b,c)$ и $U \subset B$ — односвязное открытое множество, для которого $c \in U$. Для любых точек $x, y \in U$ обозначим, как и выше, $u[x,y]$ единственный (в силу односвязности U) элемент множества $P_U(x,y)$. Также обозначим $\mathcal{A}(u,U) \stackrel{\text{def}}{=} \{u \cdot u[c,d] \mid d \in U\}$. Очевидно, для всякой точки $d \in U$ имеет место равенство $\mathcal{A}(u,U) = \mathcal{A}(u \cdot u[c,d], U)$.

Лемма 3. *Множества $\mathcal{A}(u,U)$ образуют базу топологии в E.*

Доказательство. Прежде всего, $u \in \mathcal{A}(u,U)$ для всякого $U \ni c$, откуда $\bigcup_{u \in E} \mathcal{A}(u,U) = E$.

Пусть теперь $u \in \mathcal{A}(u_1,U_1) \cap \mathcal{A}(u_2,U_2)$, где $u \in P_B(b,c)$, $u_1 \in P_B(b,c_1)$, $u_2 \in P_B(b,c_2)$. Тогда $c \in U_1 \cap U_2$ и $u = u_1 \cdot u[c_1,c] = u_2 \cdot u[c_2,c]$, так что $\mathcal{A}(u_1,U_1) = \mathcal{A}(u,U_1)$ и $\mathcal{A}(u_2,U_2) = \mathcal{A}(u,U_2)$. Но тогда $\mathcal{A}(u_1,U_1) \cap \mathcal{A}(u_2,U_2) \supset \mathcal{A}(u,V)$, где $V \subset U_1 \cap U_2$, $c \in V$ и V односвязно — такое V существует в силу локальной односвязности B. Следовательно, $\mathcal{A}(u_1,U_1) \cap \mathcal{A}(u_2,U_2)$ — объединение базовых множеств $\mathcal{A}(u,V)$ по всем $u \in \mathcal{A}(u_1,U_1) \cap \mathcal{A}(u_2,U_2)$, так что лемма доказана. $\square$

Определим в E топологию с базой $\{\mathcal{A}(u,U)\}$.

Лемма 4. *Отображение $p : \mathcal{A}(u,U) \to U$ — гомеоморфизм.*

Доказательство. Множество U односвязно, так что p — биекция; $p(v) = c \Leftrightarrow v = u \cdot u[c,d]$ (где $u \in P_B(b,c) \subset E$). Для произвольного $\mathcal{A}(u,W) \subset \mathcal{A}(u,U)$ имеем $p(\mathcal{A}(u,W)) = W$ — открытое подмножество U, так что p — открытое отображение. С другой стороны, пусть $V \subset U$ открыто; без ограничения общности можно считать (почему?), что $u \in V$. Тогда $p^{-1}(V) = \mathcal{A}(u,V)$ — открытое множество, то есть p непрерывно. $\square$

Таким образом, $p : E \to B$ — локальный гомеоморфизм.

Докажем свойство поднятия путей. Пусть γ — гомотопия путей с фиксированными концами c и d, то есть непрерывное отображение $\gamma : [0,1]^2 \to B$, для которого $\gamma(0,s) = c$ и $\gamma(1,s) = d$ при всех $s \in [0,1]$, и пусть $a \in p^{-1}(c) = P_B(b,c) \subset E$. Пусть $\Gamma(t,s) \stackrel{\text{def}}{=} a \cdot g_{t,s} \in E$, где $g_{t,s} \in P_B(c, \gamma(t,s))$ — класс гомотопии пути $\tau \mapsto \gamma(\tau t, s)$, $0 \le \tau \le 1$. Очевидно, $p(\Gamma(t,s)) = \gamma(t,s)$; нужно доказать что отображение Γ непрерывно и единственно.

Пусть U — односвязная окрестность точки $\gamma(t,s) \in B$; тогда в силу непрерывности γ существует $\varepsilon > 0$ такое, что $\gamma(t',s') \in U$ при всех $|t'-t|, |s'-s| < \varepsilon$. Тогда $\Gamma(t',s) = \Gamma(t,s) \cdot u[\gamma(t,s), \gamma(t',s)]$. С другой стороны, $\Gamma(t,s') = \Gamma(t,s) \cdot u[\gamma(t,s), \gamma(t,s')]$ (докажите!), откуда $\Gamma(t',s') = \Gamma(t,s) \cdot u[\gamma(t,s), \gamma(t',s')]$. Это означает, что $\Gamma(t',s') \in \mathcal{A}(\Gamma(t,s), U)$, то есть Γ — непрерывное отображение.

С другой стороны, пусть $\Gamma' : [0,1]^2 \to E$ — непрерывное поднятие отображения $\gamma : [0,1] \to B$. Тогда множество $T \stackrel{\text{def}}{=} \{(t,s) \in [0,1]^2 \mid \Gamma'(t,s) = \Gamma(t,s)\} \subset [0,1]^2$ замкнуто. Пусть $(t,s) \in T$, и $U \subset B$ — односвязная окрестность точки $\gamma(t,s)$. В силу непрерывности Γ' существует $\varepsilon > 0$ такое, что $\Gamma'(t',s') \in \mathcal{A}(\Gamma(t,s), U)$ при $|t'-t|, |s'-s| < \varepsilon$. Ограничение p на $\mathcal{A}(\Gamma(t,s), U)$ — гомеоморфизм по лемме 4, откуда $\Gamma(t',s') = (p|_{\mathcal{A}(\Gamma(t,s),U)})^{-1}(\gamma(t',s')) = \Gamma(t,s)$, то есть $(t',s') \in T$. Тем самым множество T также и открыто, и в силу связности $[0,1]^2$ получаем $T = [0,1]^2$, и единственность поднятия доказана.

Докажем теперь, что E линейно связно. Пусть $a \in E$ — отмеченная точка, т.е. класс гомотопии пути $\epsilon : [0,1] \to B$, стоящего в точке b: $\epsilon(t) = b \, \forall t \in [0,1]$, и пусть $d \in E$ — произвольная точка, класс гомотопии пути $\gamma : [0,1] \to B$, $\gamma(0) = b$. Обозначим $\gamma_\tau(t) \stackrel{\text{def}}{=} \gamma(\tau t)$, и пусть $\Gamma(\tau) \in P_B(b, \gamma(\tau)) \subset E$ — класс гомотопии пути γ_τ. Тогда, как нетрудно проверить (проверьте!), $\Gamma : [0,1] \to E$ — непрерывное отображение, причем $\Gamma(0) = a$ и $\Gamma(1) = d$. Таким образом, отмеченную точку $a \in E$ можно соединить непрерывной кривой с произвольной точкой $d \in E$, откуда вытекает (как?), что E линейно связно.

Наконец, докажем, что $\pi_1(E,a) = \{1\}$ (тривиальная группа). Для этого нам потребуется

Лемма 5. *Для любого непрерывного отображения (пути) $\Gamma : [0,1] \to E$ такого, что $\Gamma(0) = a$, существует непрерывное отображение $\gamma : [0,1]^2 \to B$ такое, что для всякого $t \in [0,1]$ элемент $\Gamma(t) \in E$ — класс* *гомотопии пути* $\gamma_t : [0,1] \to B$, *заданного формулой* $\gamma_t(s) \overset{def}{=} \gamma(t,s)$, *и если* $\Gamma(t) = a$, *то* $\gamma(t,s) = b$ *для всех* $s \in [0,1]$.

Доказательство. Пусть $\delta(t) \overset{\text{def}}{=} p(\Gamma(t)) \in B$ (иными словами, $\Gamma(t) \in P_B(b, \delta(t))$ — класс гомотопии путей, соединяющих точки b и $\delta(t)$). Отображение δ непрерывно в силу доказанной выше непрерывности p; также $\delta(0) = b$. Положим $\gamma_t(s) = \gamma(t,s) \overset{\text{def}}{=} \delta(ts)$. Тогда, очевидно, $\gamma_t(0) = b$, и пусть $T \subset [0,1]$ — множество t таких, что $\Gamma(t) = \Gamma'(t)$, где $\Gamma'(t) \in P_B(b, \delta(t)) \subset E$ — класс гомотопии пути $\gamma_t : [0,1] \to B$. Отображения $\Gamma, \Gamma' : [0,1] \to E$ непрерывны, совпадают в точке $t = 0$ ($\Gamma(0) = a = \Gamma'(0)$) и являются поднятиями пути $\delta : [0,1] \to B$: $p(\Gamma(t)) = \delta(t) = p(\Gamma'(t))$ для любого t. Из доказанной выше единственности поднятия вытекает, что $\Gamma = \Gamma'$, что и доказывает лемму. □

Пусть теперь $\Gamma : [0,1] \to E$ — петля, т.е. непрерывное отображение, для которого $\Gamma(0) = \Gamma(1) = a$. Пусть $\gamma : [0,1]^2 \to B$ — непрерывное отображение из леммы 5; тогда $\gamma(0,s) = b = \gamma(1,s)$ и $\gamma(t,0) = b$ для всех $t, s \in [0,1]$. Обозначим $\Lambda_r : [0,1]^2 \to [0,1]^2$, $0 \le r \le 1$, деформационную ретракцию квадрата на объединение трех его сторон $\{0\} \times [0,1]$, $[0,1] \times \{0\}$ и $\{0\} \times [0,1]$ (так что $\Lambda_0 = \mathrm{id}$, $\Lambda_1([0,1]^2)$ — объединение указанных сторон, и для всякого r ограничение Λ_r на эти стороны — тождественное отображение). Положим $\gamma_r \overset{\text{def}}{=} \gamma \circ \Lambda_r : [0,1]^2 \to B$, и пусть $\Gamma_r(t) \in E$ — класс гомотопии пути $s \mapsto \gamma_r(t,s)$. Тогда $\Gamma_0 = \Gamma$, $\Gamma_1(t) = a$ при всех t и $\Gamma_r(0) = \Gamma_r(1) = a$ при всех r. Следовательно, Γ_r — гомотопия петель, соединяющая Γ с тривиальной петлей. Это доказывает односвязность E и, тем самым, лемму 2.

□

Замечание. Ранее было доказано, что отображение $p : E \to B$ является накрытием, слой которого можно отождествить с $\pi_1(B)$, а $p_*(\pi_1(E,a)) \subset \pi_1(B,b)$ — тривиальная группа. Тривиальная группа — подгруппа любой подгруппы в $\pi_1(B,b)$. Из теоремы об эквивалентности категорий $\mathbf{Cover}_{B,b}$ и $\mathbf{Sub}_{\pi_1(B,b)}$ вытекает, что для любого накрытия $p_1 : E_1 \to B$ существует и единствен морфизм из $p : E \to B$ в него, то есть существует непрерывное отображение $f : E \to E_1$, для которого $p_1 \circ f = p$. Объект произвольной категории с таким свойством (из него существует единственный морфизм в любой другой объект) называется инициальным (или универсальным отталкивающим); в случае категории накрытий с данной базой — универсальным накрытием (над данной базой).