НМУ. Дифференциальная геометрия. Лекция 18.

Характеристические классы (продолжение).

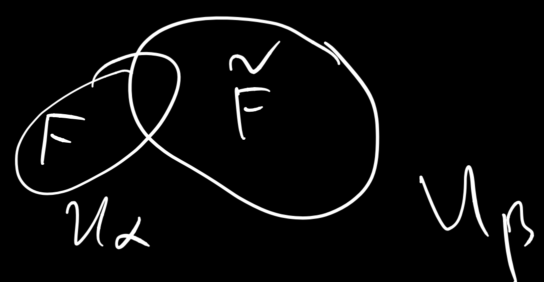
$$\xi = (E \xrightarrow{p} B) \rightsquigarrow P(\xi) \in H^*(B)$$

характеристический класс

Конструкция Черна-Вейля характеристических классов.

Строим с помощью кривизны связности.

$$E \xrightarrow{p} B$$



$$\tilde F = g F g^{-1} \qquad g \in G$$

склеивающий коцикл

$$\det \tilde F = \det F, \quad \operatorname{tr} \tilde F = \operatorname{tr} F$$

1) для вещественного расслоения можно брать $G = O(n), SO(n)$ и

$\omega, F \in \mathfrak{g} = so(n)$

2) для комплексного расслоения можно взять $G = U(n)$

$\omega, F \in \mathfrak{g} = u(n)$

<u>Опр.</u> Многочлен от матричных эл-тов $P: \mathfrak{g} \to \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ называется инвариантным, если $\forall g \in G, \forall X \in \mathfrak{g}$

$$P(gXg^{-1}) = P(X).$$

<u>Утв</u> 1) $P(F)$ — замкнутая форма.

2) $[P(F)] \in H^{2*}(B, \mathbb{R})$ ($\mathbb{C}$) не зависит от выбора связности или метрики в ξ.

<u>Опр</u> $P(\xi) = [P(F)] \in H^{2*}(B, \mathbb{R}$ / $\mathbb{C})$

характеристический класс расслоения ξ, построенный по многочлену P.

<u>Замечание.</u> Можно брать абсолютно сходящиеся в нуле инвариантные степенные ряды.

Какие есть инвариантные многочлены?

$G = U(n)$, комплексное расслоение.

Утв. Пусть $X \in \mathfrak{g}$, т.е. X – косоэрмитова матрица. Тогда $\exists\, g \in G$, такой, что

$$gXg^{-1} = \begin{pmatrix} -2\pi i x_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & -2\pi i x_n \end{pmatrix}, \quad x_i \in \mathbb{R}.$$

Следствие. Инвариантный многочлен на $\mathfrak{g} = \mathfrak{u}(n)$ полностью определяется своими значениями на диагональных матрицах, т.е. это многочлен от $x_1, \dots, x_n$ с комплексными коэффициентами.

Утв. P должен быть симметрическим многочленом от $x_1, \dots, x_n$.

$\triangleright$

$$g = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 0 & & 1 & \\ & & \ddots & & \\ & 1 & & 0 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} e_k \leftrightarrow e_l \\ x_k \leftrightarrow x_l \end{matrix}$$

$\triangleleft$

$$X = \begin{pmatrix} -2\pi i x_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & -2\pi i x_n \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ P - это многочлен от элементарных симметрических мн-нов

$$c_0(X) = 1$$

$$c_1(X) = x_1 + \ldots + x_n$$

$$c_2(X) = \sum_{i<j} x_i x_j$$

$$\vdots$$

$$c_n(X) = x_1 \ldots x_n$$

Упр. $c_i(X)$ инвариантны.

Д-во

$$c(X) = c_0(X) + c_1(X) + \ldots + c_n(X) = \det\left(E + \frac{iX}{2\pi}\right)$$

$$c(gXg^{-1}) = \det\left(E + \frac{igXg^{-1}}{2\pi}\right) = \det\left(g\left[E + \frac{iX}{2\pi}\right]g^{-1}\right) = \det\left(E + \frac{iX}{2\pi}\right) = c(X)$$

ЧТД

Мы доказали:

Утв Инвариантные многочлены на $\mathfrak{g} = \mathfrak{u}(n)$ — это в точности многочлены от $c_0(X), \dots, c_n(X)$.

Опр Характеристический класс
$$c_i(\xi) = [c_i(F)] \in H^{2i}(B, \mathbb{C})$$
называется i-м классом Чжэня расслоения ξ.

$c(X) = c_0(X) + \dots + c_n(X)$ называется полным классом Чжэня расслоения ξ.

Чжэнь (Chern) Черн.

Утв На самом деле $c_i(\xi) \in H^{2i}(B, \mathbb{R})$

$$\overline{c(F)} = \det\left(E + \frac{\overline{iF}}{2\pi}\right) =$$
$$= \det\left(E - \frac{i\overline{F}}{2\pi}\right) \ominus$$

$F \in \mathfrak{g} = \mathfrak{u}(n) \Rightarrow \overline{F}^T = -F \Rightarrow \overline{F} = -F^T$

$$\ominus \det\left(E + \frac{iF^{t}}{2\pi}\right) =$$

$$= \det\left(\left(E + \frac{iF}{2\pi}\right)^{T}\right) =$$

$$= \det\left(E + \frac{iF}{2\pi}\right) = c(F)$$

вещественный случай

$G = SO(n)$ или $O(n)$

$\forall Y \in \mathfrak{g} = so(n) \quad \exists g \in G$ т.ч.

$$gYg^{-1} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & 2\pi y_1 \\ -2\pi y_1 & 0 \end{matrix}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{\begin{matrix} 0 & 2\pi y_l \\ -2\pi y_l & 0 \end{matrix}} \end{pmatrix} \quad n = 2l$$

или

$$gYg^{-1} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & 2\pi y_1 \\ -2\pi y_1 & 0 \end{matrix}} & & & 0 \\ & \ddots & & \\ 0 & & \boxed{\begin{matrix} 0 & 2\pi y_l \\ -2\pi y_l & 0 \end{matrix}} & \\ & & & 0 \end{pmatrix} \quad n = 2l+1$$

⇒ P можно считать многочленом от $y_1, \dots, y_l$.

Что можно делать?

1) можно менять пары векторов

$\Updownarrow$

$$y_p \leftrightarrow y_q,$$ т.е.

P должен быть симметрическим многочленом от $y_1, \dots, y_l$.

2) если $G = O(n)$, то можно менять местами e_{2j+1} и e_{2j+2}, это

$$\Leftrightarrow \quad y_p \leftrightarrow -y_p \Rightarrow$$

⇒ P должен быть симметрическим многочленом от $y_1^2, \dots, y_l^2$.

3) если $G = SO(2l+1)$, то можно менять местами e_{2j+1} и e_{2j+2} и делать $e_{2l+1} \mapsto -e_{2l+1}$

$\Rightarrow P$ должен быть симметрический многочлен от $y_1^2, \dots, y_l^2$.

4) $G = SO(2l)$
знак можно менять одновременно только у четного количества $y_i \Rightarrow$
есть ещё один инвариантный многочлен $e = y_1 \dots y_l$.

Итог: для $G = O(n)$, $SO(2l+1)$
инвариантные многочлены - это многочлены от

$$p_0(X) = 1$$

$$p_1(X) = y_1^2 + \dots + y_l^2$$

$$\vdots$$

$$p_l(X) = y_1^2 \dots y_l^2, \quad l = \left[\frac{n}{2}\right].$$

$$p(X) = p_0(X) + \dots + p_l(X) = \det\left(E + \frac{X}{2\pi}\right).$$

А для $G = SO(2l)$ надо добавить

если $e(X) = y_1 \ldots y_l = Pf\left(\frac{X}{2\pi}\right)$.

$$e^2(X) = p_l(X).$$

<u>Опр</u> Когомологический класс

$$p_i(\xi) = [p_i(F)] \in H^{4i}(B, \mathbb{R})$$

называется i-м классом Понтрягина расслоения ξ,

$$p(\xi) = p_0(\xi) + \ldots + p_l(\xi) \in H^{4*}(B, \mathbb{R})$$

называется полным классом Понтрягина расслоения ξ,

$$p(\xi) = \left[\det\left(E + \frac{F}{2\pi}\right)\right].$$

Класс $e(\xi) = [e(F)] = \left[Pf\left(\frac{F}{2\pi}\right)\right]$ называется классом Эйлера расслоения ξ.

Опр Характер Черна комплексного расслоения ζ

$$\mathrm{ch}\,\zeta = \mathrm{tr}\, e^{\frac{iF}{2\pi}} \in H^{2*}(B).$$

Теорема Пусть $\zeta = (E \xrightarrow{p} B)$, $f: M \to B$,

$$\begin{tikzcd} f^*E \arrow[r] \arrow[d, "f^*p"'] & E \arrow[d, "p"] \\ M \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}$$

$\underbrace{}_{f^*\zeta}$

Тогда $P(f^*\zeta) = f^*P(\zeta)$.

▷ у $f^*\zeta$ можно взять связность $f^*\nabla$, её кривизна f^*F ◁

Утв Пусть ξ_1, ξ_2 — комплексные расслоения. Тогда $c(\xi_1 \oplus \xi_2) = c(\xi_1)c(\xi_2)$ (формула Уитни).

▷ $\xi_1 \quad \nabla^1 \quad \omega^1 \quad F^1$

$\xi_2 \quad \nabla^2 \quad \omega^2 \quad F^2$

$\xi_1 \oplus \xi_2 \quad \nabla^1 \oplus \nabla^2 \quad \omega = \left(\begin{array}{c|c} \omega^1 & 0 \\ \hline 0 & \omega^2 \end{array}\right) \quad F = \left(\begin{array}{c|c} F^1 & 0 \\ \hline 0 & F^2 \end{array}\right)$

$$c(\xi_1 \oplus \xi_2) = \left[\det\left(E + \frac{iF}{2\pi}\right)\right] =$$

$$= \left[\det\left(\begin{array}{c|c} E + \frac{iF^1}{2\pi} & 0 \\ \hline 0 & E + \frac{iF^2}{2\pi} \end{array}\right)\right] =$$

$$= \left[\det\left(E + \frac{iF^1}{2\pi}\right)\right]\left[\det\left(E + \frac{iF^2}{2\pi}\right)\right] =$$

$$= c(\xi_1)\, c(\xi_2).$$

"Нечестное" д-во:

$$F = \begin{pmatrix} 2\pi i x_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 2\pi i x_n \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c(\xi) = \left[\det\left(E + \frac{iF}{2\pi}\right)\right] =$$

$$= \left[(1+x_1)\cdots(1+x_n)\right]$$

поэтому

$$\left.\begin{aligned} F^1 &= \begin{pmatrix} -2\pi i x^1_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & -2\pi i x^1_k \end{pmatrix} \\ F^2 &= \begin{pmatrix} -2\pi i x^2_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & -2\pi i x^2_l \end{pmatrix} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F = \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} -2\pi i x^1_1 & \\ & \ddots \end{matrix} & \\ \hline & \begin{matrix} \ddots & \\ & -2\pi i x^2_l \end{matrix} \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow c(\xi) = \left[(1+x^1_1)\cdots(1+x^1_k)(1+x^2_1)\cdots(1+x^2_l)\right]$$

$$= \left[(1+x^1_1)\cdots(1+x^1_k)\right]\left[(1+x^2_1)\cdots(1+x^2_l)\right] =$$

$$= c(\xi_1)\,c(\xi_2).$$

x_i образующие Y (B_Y) W_n

Утв $ch(\xi_1 \oplus \xi_2) = ch\,\xi_1 + ch\,\xi_2$

$ch(\xi_1 \otimes \xi_2) = ch\,\xi_1 \wedge ch\,\xi_2$

▶ ξ ∇ $F = \begin{pmatrix} -2\pi i x_1 & & \\ & \ddots & \\ & & -2\pi i x_n \end{pmatrix}$

$$ch(\xi) = \left[\mathrm{tr}\, e^{\frac{iF}{2\pi}}\right] =$$

$$= \left[e^{x_1} + \dots + e^{x_n}\right].$$

$\xi_1 \oplus \xi_2$

$$ch(\xi_1 \oplus \xi_2) = \left[e^{x_1^1} + \dots + e^{x_k^1} + e^{x_1^2} + \dots + e^{x_l^2}\right] =$$

$$= \left[e^{x_1^1} + \dots + e^{x_k^1}\right] + \left[e^{x_1^2} + \dots + e^{x_l^2}\right] =$$

$$= ch\,\xi_1 + ch\,\xi_2.$$

$\xi^1 \quad F^1 = \begin{pmatrix} -2\pi i x^1_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & -2\pi i x^1_l \end{pmatrix}$

в базисе e_j, i.e.

$$F^1 e_j = -2\pi i x^1_j e_j$$

$\xi_2 \quad F^2 = \begin{pmatrix} -2\pi i x^2_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & -2\pi i x^2_l \end{pmatrix}$

в базисе f_j, i.e.

$$F^2 f_j = -2\pi i x^2_j f_j.$$

Тогда

$\xi_1 \otimes \xi_2 \quad \nabla^1 \otimes \nabla^2 (s_1 \otimes s_2) =$

$= \nabla^1 s_1 \otimes s_2 + s^1 \otimes \nabla^2 s_2$, откуда

$$F = F^1 \otimes id + Id \otimes F^2$$

В базисе $e_j \otimes f_s$ имеем

$$F e_j \otimes f_s = F^1 e_j \otimes f_s + e_j \otimes F^2 f_s =$$

$$= -2\pi i x^1_j \, e_j \otimes f_s - 2\pi i x^2_s \, e_j \otimes f_s =$$

$$= -2\pi i (x^1_j + x^2_s) \, e_j \otimes f_s,$$ то есть

у F собственные ч. $x^1_j + x^2_s$, $j = 1..k$, $s = 1..l$

Поэтому

$$ch(\xi_1 \otimes \xi_2) = \left[\sum_{j,s} e^{x^1_j + x^2_s}\right] =$$

$$= \left[\sum_{j,s} e^{x^1_j} \cdot e^{x^2_s}\right] =$$

$$= \left[\sum_j e^{x^1_j}\right]\left[\sum_s e^{x^2_s}\right] =$$

$$= ch\,\xi_1 \, ch\,\xi_2.$$

Важное вычисление

$$\gamma^1 = \begin{pmatrix} E \\ \downarrow \\ \mathbb{C}P^1 \end{pmatrix}$$ универсальное расслоение над $\mathbb{C}P^1$!

$$F = -\frac{du \wedge d\bar{u}}{(1+|u|^2)^2},$$ где u — неоднородная к-та в аффинной карте U_0.

Тогда
$$c_1(\gamma^1) = \left[-\frac{i}{2\pi} \frac{du \wedge d\bar{u}}{(1+|u|^2)^2} \right] \in$$
$$\in H^2(\mathbb{C}P^1) = H^2(S^2) = \mathbb{R}.$$

$$\int_{\mathbb{C}P^1} c_1(\gamma^1) = \int_{U_0} c_1(\gamma^1) =$$

$$= -\frac{i}{2\pi} \int_{\mathbb{C}} \frac{du \wedge d\bar{u}}{(1+|u|^2)^2} =$$

полярные к-ты r, φ

$$u = re^{i\varphi} \Rightarrow du = e^{i\varphi}dr + ire^{i\varphi}d\varphi$$

$$\bar{u} = re^{-i\varphi} \Rightarrow d\bar{u} = e^{-i\varphi}dr - ire^{-i\varphi}d\varphi$$

$$du\wedge d\bar{u} = -2ir\,dr\wedge d\varphi$$

$$= -\frac{i}{2\pi}\int_0^{+\infty}\int_0^{2\pi}\frac{-2ir\,dr\wedge d\varphi}{(1+r^2)^2} =$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\underbrace{\int_0^{2\pi}d\varphi}_{2\pi}\int_0^{+\infty}\frac{d(1+r^2)}{(1+r^2)^2} =$$

$$= -\left.\frac{-1}{1+r^2}\right|_0^{+\infty} = -1\left(0 - \frac{-1}{1}\right) = -1 \neq 0$$

$c_1(\gamma^1)$ — такая образующая в $H^2(\mathbb{CP}^1)$, что $\int_{\mathbb{CP}^1} c_1(\gamma^1) = -1$.

<u>Определение</u> Число Чженя (Понтрягина) —

— это интеграл по базе расслоения от произведения х-х классов

$$\int_B c_{i_1}(\xi) \cdots c_{i_s}(\xi) \quad \text{или}$$

$$\int_B p_{i_1}(\xi) \cdots p_{i_s}(\xi).$$

Мы нашли число Черна

$$\int_{\mathbb{CP}^1} c_1(\gamma^1) = -1$$

Аксиоматическое определение классов Черна.

0) $\forall$ комплексного векторного расслоения ξ

$$c_i(\xi) \in H^{2i}(B),$$

$$c(\xi) = c_0(\xi) + \dots + c_n(\xi)$$

1) $\forall \xi \quad c_0(\xi)=1$

2) $c_i(f^*\xi) = f^* c_i(\xi)$

3) $c(\xi_1 \oplus \xi_2) = c(\xi_1)\, c(\xi_2)$

4) Для $\gamma^1 = \left(\begin{smallmatrix} E \\ \downarrow \\ \mathbb{CP}^n \end{smallmatrix}\right)$

имеем $c(\gamma^1) = 1 - H$, где

H — элемент в когомологиях, двойственный по Пуанкаре к гиперплоскости $\mathbb{CP}^{n-1} \subset \mathbb{CP}^n$.

<u>Упр</u> Если у комплексного векторного расслоения ξ ранга n есть k линейно независимых сечений, то

$$c_{n-k+1}(\xi) = 0, \ldots, c_n(\xi) = 0.$$

▶ $\xi \supset \eta$ ← порождено k сечениями

$\eta \simeq \underline{k}$ тривиальное ранга k

$\xi = \eta \oplus \eta^{\perp}$ ← ранг $n-k$

$$c(\xi) = \underbrace{c(\eta)}_{=\,1}\ \underbrace{c(\eta^{\perp})}_{=\,c_0(\eta^{\perp}) + \ldots + c_{n-k}(\eta^{\perp})}$$

◀

<u>Пример</u>

$$T\mathbb{CP}^1 \oplus \underline{1} = (\gamma^1)^* \oplus (\gamma^1)^*$$

$$c(T\mathbb{CP}^1) = c(T\mathbb{CP}^1)\underbrace{c(1)}_{=\,1} =$$

$$= c(T\mathbb{CP}^1 \oplus 1) = c((\gamma^1)^* \oplus (\gamma^1)^*) =$$

$$= \left(c\left((\gamma_1)^{*} \right) \right)^2 = \dots$$