Категории Таннаки

① Определение к-ии Таннаки

- k — поле
- $\mathcal{C}$ $\otimes$ симм. k-лин. к-ия
  $\forall$ $\mathbb{1}$ $Hom_{\mathcal{C}}(S,T)$ k-вект. пр-во
- $\forall S,T\in\mathcal{C}$
  $\underline{Hom}(S,T)$ предст. ф-р $Hom_{\mathcal{C}}(-\otimes S,T)$,
  т.е. $\forall U\in\mathcal{C}$
  $Hom_{\mathcal{C}}(U,\underline{Hom}(S,T))\simeq Hom_{\mathcal{C}}(U\otimes S,T)$
  $S^\vee:=\underline{Hom}(S,\mathbb{1})$ двойств. объект

Замеч. • Если $\exists S^\vee$, то имеется кан. м-м $S^\vee\otimes S\xrightarrow{ev_S}\mathbb{1}$, соотв.
$Hom_{\mathcal{C}}(S^\vee\otimes S,\mathbb{1})\simeq Hom_{\mathcal{C}}(S^\vee,\underbrace{\underline{Hom}(S,\mathbb{1})}_{S^\vee})\ni id_{S^\vee}$.

- Если $\exists S^\vee$ и $\underline{Hom}(S,T)$, то имеется кан. м-м
  $S^\vee\otimes T\to\underline{Hom}(S,T)$, соотв.
  $Hom_{\mathcal{C}}(S^\vee\otimes T,\underline{Hom}(S,T))\simeq Hom_{\mathcal{C}}(\underbrace{S^\vee\otimes T\otimes S}_{\simeq S^\vee\otimes S\otimes T},T)\ni$
  $\ni ev_S\otimes id_T$.

- $Hom_{\mathcal{C}}(\mathbb{1},\underline{Hom}(S,T))=Hom_{\mathcal{C}}(S,T)$
  (если $\underline{Hom}(S,T)$ существ.)

Опр. S <u>дуализируемый</u>, если $\forall T \in \mathcal{C}$ $\exists$ <u>$\mathcal{H}om(S,T)$</u> и
$$S^\vee \otimes T \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}om(S,T)$$
<u>изом-м</u>

Опр. $\mathcal{C}$ <u>жёсткая</u> (<u>rigid</u>), если все об-ты в $\mathcal{C}$ дуализир-мы.

Пример • $V \in Vect(k)$ дуализ. $\Leftrightarrow$ $\dim_k(V) < \infty$

• $M \in Mod(R)$ дуализ. $\Leftrightarrow$ M проект. КП.
R комм. k-алгебра

Лемма Пусть $\mathcal{C}$ жёсткая, $\mathcal{D}$ $\otimes$ симм. k-лин. к-я, $F: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ $\otimes$ симм. k-лин. функтор. Тогда

(i) $\forall S \in \mathcal{C}$ $F(S)$ дуализ. в $\mathcal{D}$, причём $F(S^\vee) \simeq F(S)^\vee$

(ii) $G: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ $\otimes$ симм. k-лин. ф-р
$f: F \to G$ $\otimes$ морфизм $\Rightarrow$ f <u>изоморфизм</u>.

<u>Идея д-ва (ii)</u>: $\forall S \in \mathcal{C}$ обратной к $f_S: F(S) \to G(S)$ является
$$f_{S^\vee}^\vee = (f_{S^\vee}: F(S^\vee) \to G(S^\vee))^\vee = G(S) \to F(S) \quad \square$$

Комментарий к (i): $\exists$ $coev_S$, ev_S дуал. об-ты: $\exists$ T причём

$$\mathbb{1} \xrightarrow{coev_S} T\otimes S \xrightarrow{ev_S} \mathbb{1} \quad \text{т.ч.}$$

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "id\otimes coev_S"] \arrow[rr, bend right, "id_S"'] & S\otimes T\otimes S \arrow[r, "ev_S\otimes id_S"] & S \end{tikzcd}$$

аналог. для T. ($T = S^\vee$ для дуал. S)

Лемма Пусть $\mathcal{C}$ жёсткая и абелева, $\mathcal{D}$ – $\otimes$-симм, и абелева, $F: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ $\otimes$ симм. ф-р. Тогда

F точный справа $\Leftrightarrow$ F точный и строгий

Сл-ие $\otimes$ биточный фр в $\mathcal{C}$ как в лемме.

Д-во. По лемме дост. д-ть, что $-\otimes S$ точный справа.

- $(-\otimes S, \underline{Hom}(S,-))$ сопрях. ф-ры
- $\underline{Hom}(S,-)$ точен слева. (из опр-я т.к. $Hom_{\mathcal{C}}(S,-)$ точен слева) $\square$

Пример. $Conn_X = \{(E,\nabla)\}$ жёстк. абел. к-ия

X гладк. мн-ие

Опр. Категория Таннаки над k — это $\otimes$-алгебр. k-лин. кат-ия $\mathcal{C}$ т.ч.

- жёсткая
- абелева
- $k \xrightarrow{\sim} End_{\mathcal{C}}(\mathbb{1})$ изом-м
- $\exists\, k \subset K$ расш-ие полей и $\omega : \mathcal{C} \to Vect(K)$ $\otimes$ алгебр, точный справа (т.е. точный строгий) — это функтор слоя над K

Опр. Нейтр. кат-ия Таннаки — к-ия Танн., для которой $\exists$ фр слоя $/k$.

Замеч. (i) В опред-ии к-ии Таннаки можно убрать k-лин-ть кат-ии, сч-ть, что $End_{\mathcal{C}}(\mathbb{1})$ поле, $k := End_{\mathcal{C}}(\mathbb{1})$:

$\forall S, T \in \mathcal{C}$: $Hom(S,T)$ модуль над $End_{\mathcal{C}}(\mathbb{1})$.

(ii) В опред-ии к-ии Таннаки можно заменить $k \subset K$ на k-алг. R или k-схему X, ($Vect(K) \to Mod(R)$ или $Vect(K) \to Qcoh_X$)

Пример • $\mathcal{C} = Vect^f(k)$ нейтр. к-ия Танн. $/k$

• $Conn_X$ X связна к-ия Танн, $x \in X$ схем. точка

$K = k(x)$ $\quad \omega_x : Conn_X \longrightarrow Vect_{k(x)}$

$(E, \nabla) \longmapsto E|_x$

$(H, W.H, F^{\cdot}H_{\mathbb{C}}) \longmapsto H_{\mathbb{C}}$

- $\underset{\vee}{MHS}$ = {смеш. стр-ра Ходжа} $\longrightarrow Vect(\mathbb{Q})$

  PHS = {чист. стр-ры Ходжа}

  $End(\mathbb{Q}, F\,\mathbb{C}$ в осн. 0$) = \mathbb{Q}$.

- $MHS(k)$ = {смеш. стр-ры Ходжа $/k$} $\xrightarrow{\omega_B} Vect(\mathbb{Q})$, $k \subset \mathbb{C}$.

  $\mathbb{Q}$ лин. к-ция

  $(H_B, H_{dR}, W.H_{dR}, F^{\cdot}H_{dR}) \longmapsto H_B$

  comp: $H_{dR} \otimes \mathbb{C} \simeq H_B \otimes \mathbb{C}$

$$MHS(k) \xrightarrow{\omega_{dR}} Vect(k)$$

$$(\text{—},\text{—}) \longmapsto H_{dR}$$

- G лин. проал. гр. $/k$, сх. $/k$, т.е.

  $G = Spec(H)$, где H — (коком.) ал. Хопфа $/k$

$$\mathcal{C} = Rep^f(G) = Comod^f(H) \xrightarrow[forget]{} Vect(k)$$

Идея: $\mathcal{C} \hookrightarrow Vect^f(k)$

НЕ полная подкат-ия

абелева, $\otimes$, з-тая

относ. $V \mapsto V^{\vee}$

Об-ты в $\mathcal{C}$ — это к.м. вект. пр-ва над k + "дополн. стр-ра на них"

Идея: Все нейтр. к-ии Таннаки $\simeq Rep^f(G)$

Опр. $S \in \mathcal{C}$ к-ия Таннаки $\Rightarrow$

$$\langle S \rangle_{\otimes} = \left(\begin{array}{c}\text{наим. полная}\\ \otimes\text{, жёсткая подк-ия в } \mathcal{C}\\ \text{содерж. } S\text{, з-тая}\\ \text{отн-но подфакторов}\end{array}\right) \ni \mathbb{1}, \ni S^{\vee}$$

Явно, $\langle S\rangle_\otimes = \left\{ \begin{array}{c} \text{подфакторы} \\ \bigoplus S^{\otimes n} \otimes (S^\vee)^{\otimes m} \end{array} \right\}$

Пример. $\mathrm{char}(k)=0 \Rightarrow \Lambda^i S \subset S^{\otimes i}$
$\quad \mathrm{Sgn}^i S \subset$

• т.к. ω строгий $\Rightarrow \exists\, d$ т.ч. $\Lambda^{>d} S = 0$.
$\quad$ "$\dim(S)$", $\Lambda^d S \neq 0$

Упр. $\forall S \in \mathcal{C}$ $\quad S=0 \Leftrightarrow \omega(S)=0$ (ω точный стр.)

• $S \xrightarrow{f} T$ $\quad f$ изом $\Leftrightarrow \omega(f)$ изом.

Пример $\dim(\mathbb{1})=1$, $\langle \mathbb{1}\rangle_\otimes \subset \mathcal{C}$
$\mathrm{Vect}(k) \overset{f}{\simeq} \langle \mathbb{1}\rangle_\otimes$
$V \mapsto V\otimes \mathbb{1}$

$\mathbb{1}$ простой об-т

Замеч. • $\langle S\rangle_\otimes, \langle T\rangle_\otimes \subset \langle S\oplus T\rangle_\otimes$
• $\mathcal{C} = \bigcup_{S\in\mathcal{C}} \langle S\rangle_\otimes$ "напр. об-ие"

② Схема Isom

• $\mathcal{C}$ нейтр. кат-ия Таннаки $/k$
$\omega, \eta: \mathcal{C} \to \mathrm{Vect}(k)$ ф-ры слоя.

• R k-алгебра (комм.) $\Rightarrow \omega_R: \mathcal{C} \to \mathrm{Mod}(R)$
$S \longmapsto \omega(S)\otimes_k R$
$\quad\quad \shortparallel$
$\quad\quad \omega(S)_R$

Опр. $I(\omega,\eta): \{k\text{-алгебры (комм.)}\} \to \mathrm{Sets}$
$R \longmapsto \mathrm{Isom}^\otimes_R(\omega_R, \eta_R)$.
$\quad\quad \shortparallel$
$\quad (\mathrm{Hom}^\otimes_R(\omega_R, \eta_R))$

Пример $\mathrm{MSH}(\mathbb{Q}) \overset{\omega_B}{\underset{\omega_{dR}}{\rightrightarrows}} \mathrm{Vect}(\mathbb{Q})$

$I(\omega_{dR}, \omega_B)(\mathbb{C}) \ni \mathrm{comp}$.

Замеч. $I(\omega,\omega)$ групповой ф-р:

$\{k\text{-алгебры}\} \longrightarrow Grp$

Пусть H — алг. Хопфа над k

$G = Spec(H)$, $\mathcal{C} = Rep^f(G)$,

$\omega_0 = forget: Rep^f(G) \to Vect(k)$

Замеч. Имеется канонич. м-м гр. ф-ров

$G \hookrightarrow I(\omega_0,\omega_0)$ = "двойной центр G"

$g \longmapsto (V \xrightarrow{g} V)$

$f: \omega \to \eta \Leftrightarrow \forall S \in \mathcal{C}$ $\omega(S) \xrightarrow{f_S} \eta(S)$ т.ч.

$\forall\ S \xrightarrow{\alpha} T$ в $\mathcal{C}$:

$\boxed{\text{"}f \text{ коммутатив } \mathcal{C}\text{"}}$

$$\begin{array}{ccc} \omega(S) & \xrightarrow{f_S} & \eta(S) \\ {\scriptstyle \omega(\alpha)}\downarrow & \circlearrowleft & \downarrow{\scriptstyle \eta(\alpha)} \\ \omega(T) & \xrightarrow{f_T} & \eta(T) \end{array}$$

Утв. $G \xrightarrow{\sim} I(\omega_0,\omega_0)$

Д-во

• $Rep^f(G) \simeq Rep^f(G)^{opp} \simeq Comod^f(H)^{opp} \simeq$

($\vee$ жёсткой)

$\simeq \underset{\substack{\top \\ \text{правые модули}}}{cMod^f\text{-}A}$, $A = H^\vee$ С-алгебра Хопфа (кокоммут.)

$\left(\begin{array}{l} V \to V \otimes H \\ V^\vee \otimes H^\vee \to V^\vee \end{array}\right)$

• $End_k(\omega_0 : Rep^f(G) \to Vect^f(k)) \simeq$

$\simeq End_k(\omega_0 : cMod^f\text{-}A \to Vect^f(k)) \simeq$

$\simeq End_k(\omega_0 : cMod\text{-}A \to cVect(k))$

• Упр с пр. сом: $\overset{\text{\rotatebox{90}{$\subseteq$}}}{A}$

$\mathrm{Mod}\text{-}A \longrightarrow \mathrm{Vect}(k)$

$M \mapsto f_M$ k-лин.

$M = A$. $\quad 1 \mapsto a$, $\quad A \to A$

$\mathrm{End}_A(A) = A$

Итак, $\mathrm{End}_k(\omega_0) \simeq A$ изом-м с-алгебр.

$\cap$

$\prod_{V \in \mathrm{Rep}^f(G)} \mathrm{End}_k(V)$

$\Delta(f) = f \otimes f$

• $f \in A$ задаёт $\otimes$-м-м $\Longleftrightarrow f \in \mathrm{grp}(A) = \mathrm{Spec}(H)(k)$:

$f_V : V \longrightarrow V \otimes H \xrightarrow{id_V \otimes f} V$

$V, U \in \mathrm{Rep}^f(G)$:

$$\begin{tikzcd}
V \otimes U \arrow[r] & V \otimes H \otimes U \otimes H \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "id_V \otimes f \otimes id_U \otimes f"] & V \otimes U \otimes H \otimes H \arrow[r] & V \otimes U \otimes H \arrow[d, "id_{V\otimes U} \otimes f"] \\
& V \otimes U \arrow[rr, equal, "id"] & & V \otimes U
\end{tikzcd}$$

$= f_{V \otimes U}$

$\parallel ?$

$= f_V \otimes f_U$

$$\begin{tikzcd}
H \otimes H \arrow[r] \arrow[d, "f \otimes f"] & H \arrow[d, "f"] \\
k \arrow[r, equal] & k
\end{tikzcd} \Longleftrightarrow f \in \mathrm{grp}(H^\vee = A) \quad \square$$

Хотим: $I(\omega,\eta)$ предст. фф $\forall \mathcal{C},\omega,\eta$ афф k-схемой

$\omega,\eta : \mathcal{C} \to Vect(k)$

Замеч. Для $S \in \mathcal{C}$, $v \in \omega(S)$, $\ell \in \eta(S)^\vee = \eta(S^\vee)$

$$\omega(S)\otimes\eta(S)^\vee \longrightarrow \mathcal{O}(I(\omega,\eta)) =$$

$$\mathrm{Hom}_k(\eta(S),\omega(S)) \qquad = \mathrm{Hom}_k(I(\omega,\eta), \mathbb{G}_a)$$

R k-алгебра

$$v\otimes \ell \longmapsto \big(f\in I(\omega,\eta)(R) \mapsto \langle f(v),\ell\rangle \in R\big)$$

Утв. $I(\omega,\eta)\simeq Spec(B)$, B k-алгебра

Д-во

- $B := \bigoplus_{S\in\mathcal{C}} \mathrm{Hom}_k(\eta(S),\omega(S)) \Big/ \langle \omega(\alpha)\circ\beta = \beta\circ\eta(\alpha)\rangle_k$,

где $\alpha : S \to T$ в $\mathcal{C}$

$\beta : \eta(T)\to\omega(S)$ в $Vect(k)$.

Явно: $\omega(\alpha)\circ\beta \in \mathrm{Hom}_k(\eta(T),\omega(T))$

$\beta\circ\eta(\alpha) \in \mathrm{Hom}_k(\eta(S),\omega(S))$

- Заметим, что

$$B^\vee \simeq \mathrm{Hom}_k(\omega,\eta) \subset \prod_{S\in\mathcal{C}} \mathrm{Hom}_k(\omega(S),\eta(S))$$

с-вект. прва

Стр-ра k-алгебры на B:

- $\omega(\mathbb{1}) \simeq \eta(\mathbb{1}) \simeq k$

$B \supset \operatorname{Hom}_k(\eta(\mathbb{1}), \omega(\mathbb{1})) \overset{\simeq}{\to} k \ni 1.$

- $x \in \operatorname{Hom}_k(\eta(S), \omega(S)),\ y \in \operatorname{Hom}_k(\eta(T), \omega(T))$

$x \cdot y := x \otimes y \in \operatorname{Hom}_k(\eta(S \otimes T), \omega(S \otimes T))$

- $f \in B$ $\quad$ $\otimes$-м-м функторов

$\Leftrightarrow$ $\quad f : B \to k$ гом-м k-алгебр. $\square$

<u>Замеч.</u> • Если $\omega = \eta$, то B — алг. Хопфа,

т.к. $\underset{\underset{\mathcal{I}(\omega,\omega)}{\shortparallel}}{\operatorname{Spec}(B)}$ — групповой ф-р.

- коумнож-ие в B:

$\operatorname{End}(V) \to \operatorname{End}(V) \otimes \operatorname{End}(V),$

$V \in \operatorname{Vect}^f(k)$

$\omega(S), S \in \mathcal{C}$

- коединица в B:

$\operatorname{End}(V) \xrightarrow{Tr} k$

- антипод в B:

$f_S \in \bigoplus_{S \in \mathcal{C}} \operatorname{End}_k(\omega(S))$

$\downarrow$ $\imath$

$g_S \in \bigoplus_{S \in \mathcal{C}} \operatorname{End}_k(\omega(S))$, где

$g_S = f_{S^\vee}^\vee$

Замеч.. $I(\omega,\eta)$ "группоид над {ф-ры слоя}" в афф. схемах $/k$.

• $G_\omega := I(\omega,\omega)$

$I(\omega,\eta)$ левый торсор над G_η
правый торсор над G_ω.

Замеч.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[rr, "\omega"] \arrow[dr, dashed] & & Vect(k) \\ & Rep^f(G_\omega) \arrow[ur, "forget"'] & \end{tikzcd}$$

$\mathcal{C} \ni S \longmapsto \omega(S)$

$\forall g \in G_\omega(k)$ задаёт $g_S : \omega(S) \to \omega(S)$

$\shortparallel$ $Aut^{\otimes}(\omega)$

Замеч. $\mathcal{C} = \bigcup_{S\in\mathcal{C}} \langle S\rangle_\otimes$.

• $I(\omega,\eta) \simeq \varprojlim_{S\in\mathcal{C}} I(\omega|_{\langle S\rangle_\otimes}, \eta|_{\langle S\rangle_\otimes})$

$I(\omega|_{\langle S\rangle_\otimes}, \eta|_{\langle S\rangle_\otimes}) \overset{\text{з-тое вл-е}}{\hookrightarrow} \underline{Isom}_k(\omega(S),\eta(S))$

$\left(\begin{matrix}\shortparallel \\ GL_n\end{matrix}\right)$ $GL(\eta(S))$-торсор

• $G_\omega \simeq \varprojlim_{S\in\mathcal{C}} G(\omega|_{\langle S\rangle_\otimes})$

$G_{\omega|_{\langle S\rangle_\otimes}} \hookrightarrow GL(\omega(S)) \simeq GL_n$.
з-тая подгр.

Теор. $\mathcal{C} \xrightarrow{\sim} Rep^f(G_\omega)$.
экв-ть категорий

В общем случае,

$\underline{\mathrm{Isom}}^{\otimes}_{k}(\omega, \eta) \leftarrow V \otimes_{k} U,\ V, U \in \mathrm{Vect}(k).$

.... $\Rightarrow$ алгеброид Хопфа A над K.

$\Gamma = \mathrm{Spec}(A)$
$\downarrow$
$\mathrm{Sp}(k) \otimes_{k} \mathrm{Spec}(K).$

$\mathcal{C} \xrightarrow{\omega} \mathrm{Qcoh}_X$

$x, y \in X(k)$

$\underline{\mathrm{Isom}}^{\otimes}(\omega_x, \omega_y)$ джерб.

$\mathcal{C} \simeq \mathrm{Rep}(\Gamma) \simeq \mathrm{Qcoh}\left(\left[\mathrm{Spec}(K) \times \mathrm{Spec}(K) / \Gamma\right]\right)$

У нас. $\mathrm{Rep}(G) \simeq \mathrm{Qcoh}([pt/G])$

К-ии Таннаки $=$

$= \mathrm{Qcoh}_{\mathcal{X}},\ \mathcal{X}$ - джерб.