Лекция 9 | Опять про тензоры

В прошлый раз было дано 2 определения.

Концепт

Тенз произв - это функтор $\otimes : Vect_{\mathbb{K}} \times Vect_{\mathbb{K}} \to Vect_{\mathbb{K}}$.

на объектах $\otimes : (V, W) \longrightarrow V \otimes W$

$$\begin{tikzcd} V \times W \arrow[d, dashed, "\pi"] \\ V \otimes W \end{tikzcd}$$

π - бил. отобр.

на морфизмах $\otimes$:

$$\begin{tikzcd} (V_1, W_1) \arrow[r, "(f,g)"] \arrow[d, "\pi_1"] & (V_2, W_2) \arrow[d, "\pi_2"] \\ V_1 \otimes W_1 \arrow[r, "\exists! f\otimes g"] & V_2 \otimes W_2 \end{tikzcd}$$

(v_1, w_1)

$f \otimes g$ - строится из универсального св-ва.

Неконц. Тенз. $V_1 \otimes W_1 = \langle \sum \lambda_i v_i \otimes w_i \mid \lambda_i \in \mathbb{K}, v_i \in V_1, w_i \in W_1 \rangle$

т.ч. $\lambda(v \otimes w) = (\lambda v) \otimes w = v \otimes \lambda w$, $(v_1 + v_2) \otimes w = v_1 \otimes w + v_2 \otimes w$.

$f \otimes g (v \otimes w) = f(v) \otimes g(w). \in V_2 \otimes W_2.$

$f \otimes g\,(v \otimes w) := f(v) \otimes g(w)$..

v_i - базис в V_1, $\bar{v}_j$ - базис в V_2

Если f - имеет м-цу f_i^j, т.е. $f(v_i) = \sum_j f_i^j \bar{v}_j =: f_i^j \bar{v}_j$

g —— // —— g_k^l

(Эйнштейн)

повторяющ. индексы — — означают суммирование

М-ца для $(f \otimes g)$ в базисе

$v_i \otimes w_j \in V_1 \otimes W_1$

$\bar{v}_k \otimes \bar{w}_l \in V_2 \otimes W_2$.

$$(f \otimes g)^{kl}_{\underline{\underline{ij}}} = f_i^k g_j^l$$

$\uparrow$

коэфф разл. образа базисн. вектора $v_i \otimes w_j$ при базисном $\bar{v}_k \otimes \bar{w}_l$.

Ещё о ~~рекламе понятия категорий.~~

$\otimes$ бывает не только у вект. пр-в.

Пример. $\mathcal{C}$ — R-mod (модулей над коммут. кольцом R).

левые = правые.

$\otimes_R : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$

$(V, W) \to V \otimes_R W$

определение = универсальное св-во

$$\begin{tikzcd} & V \times W \arrow[dl, "\varphi"'] \arrow[d, "\pi"] \\ U & V \otimes_R W \arrow[l, dashed, "\exists! \psi"] \end{tikzcd}$$

π — билинейно $\Leftrightarrow$ $\pi(\lambda v, w) = \lambda \pi(v,w) = \pi(v, \lambda w)$, $\lambda \in R$.

$V \otimes_R W = R\langle v, w\rangle / \dots$

Пример! $R = \mathbb{Z}$, $\mathcal{C}$ = Абелевы группы.

$$\mathbb{Z}/_{\text{НОД}(m,n)} \simeq \mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/_{m\mathbb{Z}} = \left\{ \underset{k\, a \otimes b}{k(a,b)} \;\middle|\; a \in \mathbb{Z}/_n,\ b \in \mathbb{Z}/_m \right\} \Big/ \begin{array}{l} k(a,b) = (ka, b) = \\ = (a, kb) \\ (a_1 + a_2, b) = (a_1, b) + (a_2, b) \\ \dots \end{array}$$

$a \otimes b = a \cdot (1 \otimes b) = ab(1 \otimes 1)$.

$0 \otimes 1 = n \otimes 1 = n \cdot (1 \otimes 1) = 0$; $m(1 \otimes 1) = 1 \otimes m = 0 \Rightarrow \underset{(am + bn)}{\text{НОД}(m,n)} \cdot (1 \otimes 1) = 0$.

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \arrow[d] \arrow[dr] & \\
\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \arrow[r, dashed, "\exists \psi"] & \mathbb{Z}/\text{нод}(m,n)\mathbb{Z}
\end{tikzcd}
$$

$(a,b) \to [a]_{\text{нод}} \cdot [b]_{\text{нод}}$ $\mathbb{Z}$-билинейное отобр

$(1 \otimes 1) \longrightarrow 1$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/\text{нод}(m,n)\mathbb{Z}.$$

$\square$

Функтор расширение скаляров:

$\dim_{\mathbb{F}}(\mathbb{F} \otimes_{\mathbb{K}} V) = \dim_{\mathbb{K}} V$

$\boxed{\mathbb{F} \supset \mathbb{K}}$

$$\mathbb{F} \otimes_{\mathbb{K}} - : \mathrm{Vect}_{\mathbb{K}} \longrightarrow \mathrm{Vect}_{\mathbb{F}}$$

на объектах: $V \longrightarrow \mathbb{F} \otimes_{\mathbb{K}} V$ ← есть каноп. стр-ра $\mathbb{F}$-пр-ва.

$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{F}$, $\alpha \in \mathbb{K}$: $\lambda \cdot (\mu \otimes v) := (\lambda\mu) \otimes v.$

$$\lambda(\mu_1 \otimes v_1 + \mu_2 \otimes v_2) = \lambda(\mu_1 \otimes v_1) + \lambda(\mu_2 \otimes v_2) = (\lambda\mu_1) \otimes v_1 + (\lambda\mu_2) \otimes v_2.$$

$$\mu\alpha \otimes v = \mu \otimes \alpha v.$$

$$\mathbb{F} \otimes_{\mathbb{K}} \left(\underbrace{V \xrightarrow{f} W}_{\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}} \right) \rightsquigarrow \mathbb{F} \otimes_{\mathbb{K}} V \xrightarrow{1 \otimes f} \mathbb{F} \otimes_{\mathbb{K}} W$$

$\mathbb{F}$-линейное отображение.

$f \in \mathrm{Mor}_{\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}}(V, W)$ $\qquad 1 \otimes f \in \mathrm{Mor}_{\mathrm{Vect}_{\mathbb{F}}}(\mathbb{F} \otimes_{\mathbb{K}} V, \mathbb{F} \otimes_{\mathbb{K}} W).$

Упр. $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(\mathbb{F}\otimes_{\mathbb{K}} V, \mathbb{F}\otimes_{\mathbb{K}} W) = \mathbb{F}\otimes_{\mathbb{K}} \mathrm{Hom}(V,W)$

Имеются каноническ. из-змы.

$$(\mathbb{F}\otimes_{\mathbb{K}} V)\otimes_{\mathbb{F}}(\mathbb{F}\otimes_{\mathbb{K}} W) = \mathbb{F}\otimes_{\mathbb{K}}(V\otimes_{\mathbb{K}} W).$$

(морфизм функторов) эквивалентн

Л и П части это функторы $\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}^{op}\times\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}\to\mathrm{Vect}_{\mathbb{F}}$

$\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}\times\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}\to\mathrm{Vect}_{\mathbb{F}}.$

Т.е. нужно построить биекцию между левой и пр. частями, т.ч. она коммутирует с отображениями.

$$(V,W)\longrightarrow(\mathbb{F}\otimes_{\mathbb{K}} V, \mathbb{F}\otimes_{\mathbb{K}} W)\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(\mathbb{F}\otimes_{\mathbb{K}} V, \mathbb{F}\otimes_{\mathbb{K}} W)$$

$$\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}\times\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}\xrightarrow{\mathbb{F}\otimes -}\mathrm{Vect}_{\mathbb{F}}\times\mathrm{Vect}_{\mathbb{F}}\xrightarrow{\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(-,-)}\mathrm{Vect}_{\mathbb{F}}$$

$\mathbb{F}\supset\mathbb{K}$

Выберем базис в $V=\langle e_1,\dots,e_n\rangle$, базис в $\mathbb{F}/\mathbb{K} = f_1,\dots,f_d$ ($f_1 = 1$)

базис$/\mathbb{K}$ в $\mathbb{F}\otimes_{\mathbb{K}} V = f_i\otimes e_j$; Базис над$/\mathbb{F}$: $\underline{1\otimes e_j}$: $\sum \lambda_i f_i\otimes e_i = \lambda_i f_i\cdot(1\otimes e_i)$.

Ещё о канонических из-змах, связанных с тензорным произведением!

Теор. Имеет место набор "канон" из-змов.

1) $(U\otimes V)\otimes W \xrightarrow{\sim} U\otimes(V\otimes W)$. : $Vect_{\mathbb{K}}\times Vect_{\mathbb{K}}\times Vect_{\mathbb{K}}\to Vect_{\mathbb{K}}$.
Ассоц. тенз. произв.

2) $V\otimes W \xrightarrow{\sim} W\otimes V$. коммут.
$(v\otimes w)\to(w\otimes v)$.

3) $V^*\otimes W^* \xrightarrow{\sim} (V\otimes W)^*$

4) $V^*\otimes W \xrightarrow{\sim} Hom(V,W)$ $\quad$ $(\xi, w) \to (v \to w\xi(v))$, $\xi\in V^*$, $w\in W$, $\in Hom(V,W)$.

5) $Hom(U\otimes V, W) \xrightarrow{\sim} Hom(U, Hom(V,W))$.
$\simeq U^*\otimes V^*\otimes W$.

Из-м. функторов = "канонический" (из-зм)

ф-рот $F \overset{\varepsilon}{\Rightarrow} G$, $F, G \in Funct(\mathcal{C},\mathcal{D})$.

$\varepsilon: F \longrightarrow G$ т.е. $\forall X \in Ob(\mathcal{C})$ $\exists\ \varepsilon_X: F(X) \xrightarrow{(\simeq)} G(X)$

т.ч. $\forall f: X\to Y$ имеем

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{\varepsilon_X} & G(X) \\ \downarrow F(f) & & \downarrow G(f) \\ F(Y) & \xrightarrow[\varepsilon_Y]{} & G(Y) \end{array}$$

$$\mathrm{Hom}(\underset{\varphi}{U}, \mathrm{Hom}(V, W)) \overset{\varepsilon}{\dashrightarrow} \mathrm{Hom}(U \otimes V, W) \quad \in \mathrm{Vect}_{\Bbbk}^{op} \times \mathrm{Vect}_{\Bbbk}^{op} \times \mathrm{Vect}_{\Bbbk} \to \mathrm{Vect}_{\Bbbk}$$

$$\alpha : u \longrightarrow (\alpha_u : V \to W) \rightsquigarrow$$

$$\begin{array}{ccc} U \times V & \ni & (u, v) \\ \downarrow & \searrow^{\pi} & \downarrow \\ U \otimes V & \overset{\exists !}{\dashrightarrow} & W \qquad \alpha_u(v) \end{array}$$

билинейное отображ.;

Универсальность $\otimes$

которое из унив. тенз произв. опред. лин. отобр $U \otimes V \to W$.

$\varepsilon_{u,v,w}$ – из-зм. т.к. $\ker(\varepsilon) = 0$, dim лев и прав. части совпадают и равны $\dim U \cdot \dim V \cdot \dim W$ $\square$.

$F : \mathcal{C}^{op} \longrightarrow \mathcal{D}$ – контрав. из $\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$

$\Leftrightarrow F(X \xrightarrow{f} Y) = F(X) \xleftarrow{F(f)} F(Y)$.

$\mathrm{Hom}(U, -) : \mathrm{Vect}_{\Bbbk} \to \mathrm{Vect}_{\Bbbk}$ – ковариантный

$f : V_1 \to V_2$, $\varphi: U \to V_1$, $f \circ \varphi: U \to V_2$

$\mathrm{Hom}(-, U) : \mathrm{Vect}_{\Bbbk}^{op} \longrightarrow \mathrm{Vect}_{\Bbbk}$

$V \longrightarrow \mathrm{Hom}(V, U)$.

$$\begin{array}{ccc} V_1 & \xrightarrow{f} & V_2 \\ & {\scriptstyle f \circ \varphi} \searrow \quad \swarrow {\scriptstyle \varphi} & \\ & U & \end{array}$$

$\mathrm{Hom}(-, U) : \varphi \to f \circ \varphi$

$\varphi \in \mathrm{Hom}(V_2, U)$, $f \circ \varphi \in \mathrm{Hom}(V_1, U)$

Опр. Ассоц. Алгебра A над полем $\mathbb{K}$ $\stackrel{def}{=}$ кольцо A, вект. пр-вом над полем $\mathbb{K}$ т.ч. умножение согласовано со стр-рой вект. пр-ва:

$$\begin{tikzcd} *: A\times A \arrow[r] \arrow[d] & A \quad (\text{билинейно}). \\ *: A\otimes_{\mathbb{K}} A \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

$\Rightarrow$

Тем самым, чтобы задать стр-ру Алг-ры над полем $\mathbb{K}$, нужно выбрать тензор $\mu \in Hom_{\mathbb{K}}(A\otimes_{\mathbb{K}} A, A) \simeq (A\otimes A)^*\otimes A \cong A^*\otimes A^*\otimes A$.

$\mu = \sum_{ijk} \mu_{ij}^k\, \xi^i\otimes\xi^j\otimes e_k$, где ξ^i – базис в A^*, e_i – базис в A.

$$e_i\cdot e_j = \mu_{ij}^k e_k$$

$(e_i\cdot e_j)e_m = e_i(e_j e_m) \iff (\mu_{ij}^k e_k)e_m = \mu_{ij}^k \mu_{km}^l e_l$

Условие ассоц. произв-ия

$$\boxed{\sum_k \mu_{ij}^k \mu_{km}^l = \sum_k \mu_{jm}^k \mu_{ik}^l}$$

Условие для каждой 4-ки индексов $i\, j\, l\, m$.

Усл-ие ассоц.

Упр. Выписать усл-ие коммут.

Пример. Алгебра кватернионов $\mathbb{H}$ – алгебра над $\mathbb{R}$.
с базисом $1, i, j, k$
т.ч. умножение базисных эл-ов
выглядит сл. образом:

$$\boxed{\begin{aligned} i^2 = j^2 = k^2 = -1 \\ ij = k = -ji \\ jk = i = -kj \\ ki = j = -ik \end{aligned}}$$

Утв. $\mathbb{H}$ некомм алгебра с делением $/\mathbb{R}$.

$$(a+bi+cj+dk)^{-1} = \frac{a-bi-cj-dk}{a^2+b^2+c^2+d^2}.$$

Замечание. Если $\mathbb{F} \supset \mathbb{K}$, A – алгебра над $\mathbb{K}$, то $\mathbb{F} \otimes_{\mathbb{K}} A$ – алгебра над $\mathbb{F}$.

$A^* \otimes A^* \otimes A$
$\left(\sum \xi^i \otimes \xi^j \otimes e_k c_{ij}^k\right) = \mu$

для этого достаточно использовать стр-ные конст. тензора умножения $c_{ij}^k = \langle e_i \cdot e_j, e_k \rangle \in \mathbb{K}$.

Упр. $\mathbb{H} \not\cong Mat_2(\mathbb{R})$ однако $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H} \simeq \mathbb{C} \otimes Mat_2(\mathbb{R})$ не тело.

$$\underset{(1)}{\mu} = \sum \mu_{ij}^{k} \, \xi^{i} \otimes \xi^{j} \otimes e_k \quad \longleftrightarrow \quad e_i \cdot e_j := \sum_k \underline{\underline{\mu_{ij}^{k}}} \, e_k.$$

$$\mathrm{Hom}(\underset{e_i \otimes e_j}{A \otimes A}, \underset{e_k}{A}) = A^* \otimes A^* \otimes A$$

$$(e_i \cdot e_j) e_m = \Big(\sum_k \underline{\underline{\mu_{ij}^{k}}} \, e_k\Big) \cdot e_m =$$

линейность

$$= \sum_k \underline{\underline{\mu_{ij}^{k}}} \, (e_k \cdot e_m) =$$

$$= \sum_k \sum_\ell \mu_{ij}^{k} \mu_{km}^{\ell} \, e_\ell$$

$\square$.

Все на семинар.