

Λекция 9

Οπότε

προ ΤΕΝΖΟΡΩΝ
για 2 σφραγισμένα.

В προηγούμενη раз δώλω
концепт
Тенз произв - это функтор

на объектах

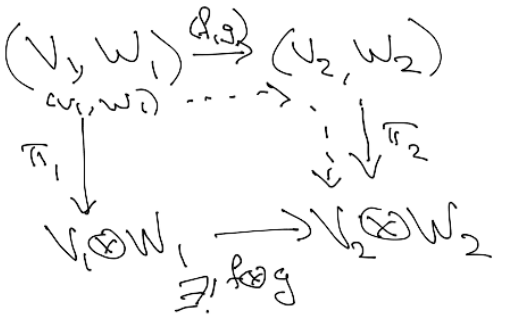
$$\otimes : \text{Vect}_{\mathbb{K}} \times \text{Vect}_{\mathbb{K}} \rightarrow \text{Vect}_{\mathbb{K}}$$

$$\otimes : (V, W) \rightarrow \underline{V \otimes W}$$

$v \times w$
 $\downarrow \pi$
 Σμ. στοιχ.

на морфизмах $\otimes : (V_1, W_1) \xrightarrow{f, g} (V_2, W_2)$

$f \otimes g$ - строится из
универсальной
св. ва.



Канонич. Тенз

$$V_1 \otimes W_1 = \langle \sum \lambda_i v_i \otimes w_i \mid \lambda_i \in \mathbb{K}, v_i \in V_1, w_i \in W_1 \rangle$$

π.γ. $\lambda(v \otimes w) = (\lambda v) \otimes w = v \otimes \lambda w, (v_1 + v_2) \otimes w = v_1 \otimes w + v_2 \otimes w$

$$f \otimes g (v \otimes w) = f(v) \otimes g(w) \in V_2 \otimes W_2.$$

$$f \otimes g (v \otimes w) := f(v) \otimes g(w).$$

Εάν f - είναι m -ου f_i^j , τ.ε.

$$g \xrightarrow{||} g_k^l$$

m -ου g_k ($f \otimes g$) в δαγμε

$$v_i \otimes w_j \in V_1 \otimes W_1$$

$$\bar{v}_k \otimes \bar{w}_l \in V_2 \otimes W_2.$$

$$(f \otimes g)_{ij}^{kl} = f_i^k g_j^l$$

↑
 κωδ. παρ. 1. οδραγα δαγμε. δεκτορα $v_i \otimes w_j$
 κωδ. παρ. 2. οδραγα δαγμε. δεκτορα $\bar{v}_k \otimes \bar{w}_l$.

v_i - δαγμε в V_1 \bar{v}_j - δαγμε в V_2

$$f(v_i) = \sum_j f_i^j \bar{v}_j =: f_i^j \bar{v}_j =$$

(\exists δαγμε)

Ποδραγα. κωδ. παρ. 1 -

- οδραγα. κωδ. παρ. 2 - οδραγα. κωδ. παρ. 3

Επι: ο πρόσθετος κλειστή κατηγορία.

⊗ δίνει με τον τρόπο υ βεκτ. κρ-β.

Παράδειγμα, $\mathcal{C} = R\text{-mod}$ (μοδουλές για κομμ. κολύκο R).
 λέγεται \Rightarrow κρ-β.

$$\begin{aligned} \otimes_R: \mathcal{C} \times \mathcal{C} &\rightarrow \mathcal{C} \\ (V, W) &\rightarrow V \otimes_R W \end{aligned}$$

συνεργισμός = γυναικεία ομοιομορφία

$$\begin{array}{ccc} & V \times W & \\ \varphi \swarrow & \downarrow \pi & \\ U \subseteq \dots \otimes_R V \otimes_R W \dots & \text{δυναμική} & \Leftrightarrow \pi(\lambda v, w) = \lambda \pi(v, w) = \pi(v, \lambda w) \\ \exists! \psi & & \lambda \in R. \end{array}$$

Παράδειγμα $R = \mathbb{Z}$, $\mathcal{C} = \text{Αδελφότητα ζυγών}$.

$$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/\text{Hog}(m,n)\mathbb{Z}$$

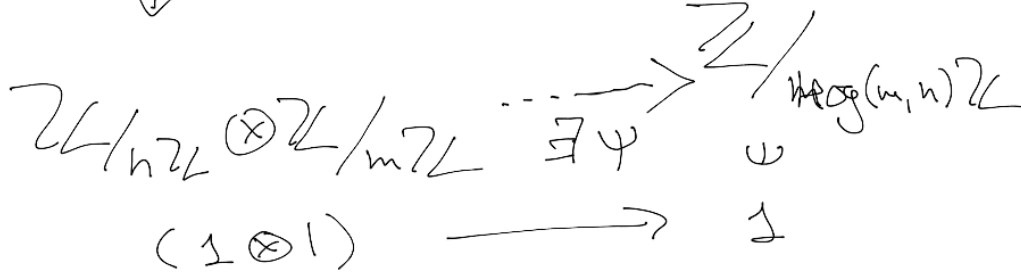
$$= \{ (ka, kb) \mid a \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \} / \{ (ka, kb) = (ka, kb) = (ka, kb) \}$$

$$a \otimes b = a \cdot (1 \otimes b) = ab(1 \otimes 1)$$

$$0 \otimes 1 = n \otimes 1 = n \cdot (1 \otimes 1) = 0 ; m(1 \otimes 1) = 1 \otimes m = 0 \Rightarrow \text{Hog}(m,n) \cdot (1 \otimes 1) = 0$$

($a_m + b_n$)

$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \xrightarrow{(a,b) \rightarrow [a]_{\text{mod } m} \cdot [b]_{\text{mod } n}}$ \mathbb{Z} -δυναμεισθε
 οσοδρ



$$\Rightarrow \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/\text{lcm}(m,n)\mathbb{Z}$$

□

Функция расширения скаляров:

$$\dim_{\mathbb{F}}(\mathbb{F} \otimes_{\mathbb{K}} V) = \dim_{\mathbb{K}} V$$

$\mathbb{F} > \mathbb{K}$

$$\mathbb{F} \otimes_{\mathbb{K}} -: \text{Vect}_{\mathbb{K}} \longrightarrow \text{Vect}_{\mathbb{F}}$$

на объектах: $V \longrightarrow \mathbb{F} \otimes_{\mathbb{K}} V \longleftarrow$ есть канон. стр-па \mathbb{F} -мод-ля.

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{F} \quad \alpha \in \mathbb{K} : \lambda \cdot (\mu \otimes v) := (\lambda \mu) \otimes v.$$

$$\lambda(\mu_1 \otimes v_1 + \mu_2 \otimes v_2) = \lambda(\mu_1 \otimes v_1) + \lambda(\mu_2 \otimes v_2) = (\lambda \mu_1) \otimes v_1 + (\lambda \mu_2) \otimes v_2.$$

$$\mu \alpha \otimes v = \mu \otimes \alpha v.$$

$$\mathbb{F} \otimes_{\mathbb{K}} \left(\underset{\text{Vect}_{\mathbb{K}}}{V \xrightarrow{f} W} \right) \rightsquigarrow \mathbb{F} \otimes_{\mathbb{K}} V \xrightarrow{\otimes f} \mathbb{F} \otimes_{\mathbb{K}} W$$

\mathbb{F} -линейное отображение.

$$f \in \text{Mor}_{\text{Vect}_{\mathbb{K}}}(V, W)$$

$$\otimes f \in \text{Mor}_{\text{Vect}_{\mathbb{F}}}(\mathbb{F} \otimes_{\mathbb{K}} V, \mathbb{F} \otimes_{\mathbb{K}} W).$$

$$\text{Hom}_{\mathbb{F}}(\mathbb{F} \otimes_{\mathbb{K}} V, \mathbb{F} \otimes_{\mathbb{K}} W) = \mathbb{F} \otimes_{\mathbb{K}} \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$$

и не имеет канонич. изоморфизма.

$$(\mathbb{F} \otimes_{\mathbb{K}} V) \otimes_{\mathbb{F}} (\mathbb{F} \otimes_{\mathbb{K}} W) = \mathbb{F} \otimes_{\mathbb{K}} (V \otimes_{\mathbb{K}} W)$$

(Корреспондент функторов) эквивалентны

и π части это функторы

$$\text{Vect}_{\mathbb{K}}^{\text{op}} \times \text{Vect}_{\mathbb{K}} \rightarrow \text{Vect}_{\mathbb{F}}$$

$$\text{Vect}_{\mathbb{K}} \times \text{Vect}_{\mathbb{K}} \rightarrow \text{Vect}_{\mathbb{F}}$$

Т.е. нужно построить отображение между левои и пр. частями, т.ч. она коммутирует с отображениями.

$$(V, W) \longrightarrow (\mathbb{F} \otimes_{\mathbb{K}} V, \mathbb{F} \otimes_{\mathbb{K}} W) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{F}}(\mathbb{F} \otimes_{\mathbb{K}} V, \mathbb{F} \otimes_{\mathbb{K}} W)$$

$$\text{Vect}_{\mathbb{K}} \times \text{Vect}_{\mathbb{K}} \xrightarrow{\mathbb{F} \otimes -} \text{Vect}_{\mathbb{F}} \times \text{Vect}_{\mathbb{F}} \xrightarrow{\text{Hom}_{\mathbb{F}}(-, -)} \text{Vect}_{\mathbb{F}} \quad \boxed{\mathbb{F} \supset \mathbb{K}}$$

Введем базис B $V = \langle e_1, \dots, e_n \rangle$, базис b $\mathbb{F}/\mathbb{K} = \{f_1, \dots, f_d\}$

базис $\mathbb{F}/\mathbb{K} \otimes B$ $\mathbb{F} \otimes_{\mathbb{K}} V = f_i \otimes e_j$; базис $\text{map}_{\mathbb{F}} : \underline{1 \otimes e_j} : \sum \lambda_i f_i \otimes e_i = \sum \lambda_i f_i \cdot (1 \otimes e_i)$

Ещё о канонических изоморфизмах, связанных с тензорным произведением:

Теор. Имеет место набор "канон" изоморф.

$$1) (U \otimes V) \otimes W \xrightarrow{\sim} U \otimes (V \otimes W). \quad : \text{Vect}_K \times \text{Vect}_K \times \text{Vect}_K \rightarrow \text{Vect}_K$$

Ассоц. тенз. произв.

$$2) V \otimes W \xrightarrow{\sim} W \otimes V. \quad \text{коммут.}$$

$(v \otimes w) \rightarrow (w \otimes v)$.

$$3) V^* \otimes W^* \xrightarrow{\sim} (V \otimes W)^* \quad \begin{matrix} \hookrightarrow V^* \otimes W^* & \text{Hom}(V, W) \\ \hookrightarrow & \downarrow \end{matrix}$$

$$4) V^* \otimes W \xrightarrow{\sim} \text{Hom}(V, W) \quad (\{, w\} \rightarrow \{v \rightarrow w\}(w)).$$

$$5) \text{Hom}(U \otimes V, W) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}(U, \text{Hom}(V, W)).$$

$$\simeq U^* \otimes V^* \otimes W.$$

Из-м. функторов
= "каноническим"
(из-за)

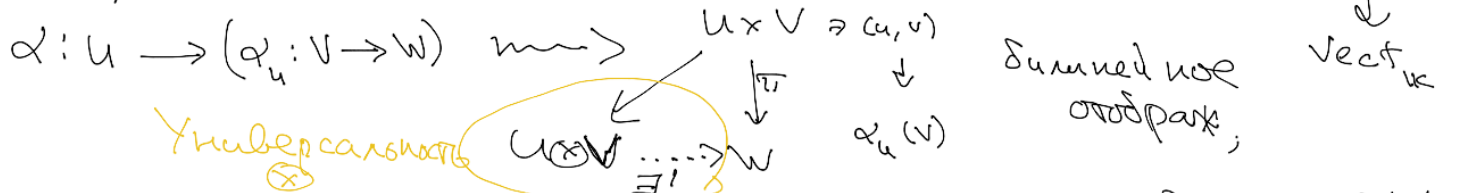
ф-ции $F \xrightarrow{\xi} G, F, G \in \text{Funct}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$.

$\mathcal{E} : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ т.е. $\forall X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$
 $\exists \xi_X : F(X) \xrightarrow{\sim} G(X)$

т.ч. $\forall f : X \rightarrow Y$ имеет

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{\xi_X} & G(X) \\ \downarrow F(f) & & \downarrow G(f) \\ F(Y) & \xrightarrow{\xi_Y} & G(Y) \end{array}$$

$$\text{Hom}(U, \text{Hom}(V, W)) \xrightarrow{\cong} \text{Hom}(U \otimes V, W) \in \text{Vect}_K^{\text{op}} \times \text{Vect}_K^{\text{op}} \times \text{Vect}_K$$



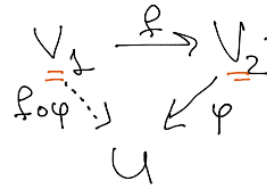
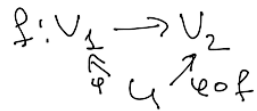
Универсальность $U \otimes V \dots \rightarrow W$
 которая из унив. тенз произв. опрег. лун. морф $U \otimes V \rightarrow W$.

$\xi_{u,v,w}$ - из-за т.к. $\ker(\xi) = 0$, dim лев и прав. части совпадают и равны $\dim U \cdot \dim V \cdot \dim W$.

$$F: \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{D} \text{ - контрвал. морф } \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$$

$$\Leftrightarrow F(X \xrightarrow{f} Y) = F(X) \xleftarrow{F(f)} F(Y)$$

$\text{Hom}(U, -) : \text{Vect}_K \rightarrow \text{Vect}_K$ - ковариантность



$\text{Hom}(-, U) : \text{Vect}_K^{\text{op}} \rightarrow \text{Vect}_K$
 $\xrightarrow{V} \text{Hom}(V, U)$

$$\text{Hom}(-, U) : \varphi \rightarrow f \circ \varphi$$

$$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow \\ \text{Hom}(V_2, U) & \text{Hom}(V_1, U) \end{matrix}$$

ассоц. \xrightarrow{A}
 Опр. Алгебра над полем $\mathbb{K} \stackrel{\text{def}}{=} \text{кольцо}$, вект. пр-вом над полем \mathbb{K} .
 Т.ч. умножение согласовано со стр-рой вект. пр-ва:

$$* : A \times A \rightarrow A \quad (\text{билинейно}).$$

$$\Rightarrow * : \underset{\mathbb{K}}{A \otimes A}$$

Тем самым, чтобы задать стр-ру Ал-бры над полем \mathbb{K} ,

нужно выбрать тензор $\mu \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(A \otimes_{\mathbb{K}} A, A) \simeq (A \otimes_{\mathbb{K}} A)^* \otimes_{\mathbb{K}} A \simeq A^* \otimes_{\mathbb{K}} A^* \otimes_{\mathbb{K}} A$.

$$\mu = \sum_{ijk} \mu_{ij}^k z^i \otimes z^j \otimes e_k, \text{ где } z^i - \text{базис в } A^*, e_i - \text{базис в } A.$$

$$e_i \cdot e_j = \mu_{ij}^k e_k$$

$$(e_i \cdot e_j) \cdot e_m = e_i \cdot (e_j \cdot e_m)$$

Условие ассоц. произв-ия

$$(\mu_{ij}^k e_k) \cdot e_m = \mu_{ij}^k \mu_{km}^e e_e$$

$$\sum_j \mu_{ij}^k \mu_{km}^e = \sum_j \mu_{jm}^e \mu_{ik}^e$$

условие
 где k, m, e
 4-к4
 индекс
 $i, j \in m$.

Усл-ие ассоц.

Упр. Проверить усл-ие коммут.

Пример. Алгебра кватернионов \mathbb{H} - алгебра над \mathbb{R} .

с базисом $1, i, j, k$

т.ч. умножение базисных эл-тов
выглядит ел. образом:

$$\begin{cases} i^2 = j^2 = k^2 = -1 \\ ij = k = -ji \\ jk = i = -kj \\ ki = j = -ik \end{cases}$$

Утв. \mathbb{H} - ^{некомм} алгебра с делением / \mathbb{R} .

$$(a + bi + cj + dk)^{-1} = \frac{a - bi - cj - dk}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$$

Замечание Если $F \supset K$, A - алгебра над K ,
то $F \otimes_K A$ - алгебра над F .

$$\left(\sum_{i,j} \alpha_{ij} \otimes e_k \otimes c_{ij}^k \right) = 1$$

$A^* \otimes A^* \otimes A$

для этого достаточно использовать ел-ное конст.
тензора умножения $c_{ij}^k = (e_i \cdot e_j, e_k) \in K$.

Упр. $\mathbb{H} \not\cong \text{Mat}_2(\mathbb{R})$ однако $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H} \cong \mathbb{C} \otimes \text{Mat}_2(\mathbb{R})$
не верно.

$$\mu = \sum_{\mathbb{N}} \mu_{ij}^k \{i \otimes j\} \otimes e_k$$

$$\longleftrightarrow e_i \cdot e_j := \sum_k \mu_{ij}^k e_k.$$

$$\text{Hom}(A \otimes A, A) = A \otimes A \otimes A$$

$e_i \otimes e_j \quad e_k$

$$(e_i \cdot e_j) e_m = \left(\sum_k \mu_{ij}^k e_k \right) \cdot e_m =$$

линейность

$$= \sum_k \mu_{ij}^k (e_k \cdot e_m) =$$

$$= \sum_k \sum_e \mu_{ij}^k \mu_{km}^e e_e$$

□.

Все на семинаре.