Лекция 8 | Тензорное произведение

Рабоче-крестьянское определение:

Пусть V, W — пара вект. пр-в $/\mathbb{K}$.
($\dim < \infty$).

$$V \otimes_{\mathbb{K}} W := L / L_0.$$

где L = $\mathbb{K}$-лин. оболочка мн-ва пар (v, w), $v \in V$, $w \in W$.

$$\left\{ \sum_{i=1}^{N} \alpha_i (v_i, w_i) \right\}$$

$$L_0 = \left\{ \begin{array}{l} \alpha(v, w) - (\alpha v, w) \\ \alpha(v, w) - (v, \alpha w) \\ (v_1 + v_2, w) - (v_1, w) - (v_2, w) \\ (v, w_1 + w_2) - (v, w_1) - (v, w_2) \end{array} \right\}$$

Замечание (обозначение)

$$\pi : V \times W \longrightarrow V \otimes W$$
$$(v, w) \longrightarrow (v, w) := v \otimes w$$

отображение π линейно по каждому аргументу:

$\exists!\ \pi: V \times W \longrightarrow V/L_0 =: V \otimes W$

$(v, w) \longrightarrow v \otimes w$

π - билинейно, т.е. $\pi(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2, w) =$

$= \lambda_1 \pi(v_1, w) + \lambda_2 \pi(v_2, w)$

<u>Более того</u> пр-во $V \otimes W$ – <u>универсальное</u> с этим св-вом.

т.е.

$$\begin{tikzcd} V \times W \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"'] & U \\ V \otimes W \arrow[ur, dotted, "\exists!\psi"'] & \end{tikzcd}$$

линейное отобр

вект. пр-в.

Пусть дано билин. отобр. φ

Тогда $\exists!\ \psi$: т.ч. $\psi \circ \pi = \varphi$.

<u>Более наглядно</u>: Выберем базис $v_1, \dots, v_n \in V$

$w_1, \dots, w_m \in W$

Тогда эл-ты $\left\{ v_i \otimes w_j \;\middle|\; \begin{matrix} i = 1, \dots n \\ j = 1, \dots m \end{matrix} \right\}$ образуют базис в пр-ве $V \otimes W$.

$$\pi\left(\sum x_i v_i, \sum y_j w_j\right) = \sum_{i,j} x_i y_j \pi(v_i, w_j) = \sum x_i y_j v_i \otimes w_j$$

Наглядная конструкция для $V\otimes W :=$ через базисы: $V=\langle v_i\rangle$, $W=\langle w_j\rangle$ — имеет базис "$v_i\otimes w_j$". e_{ij}

Имеем универсальное св-во:

$$\begin{tikzcd}
V\times W \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[d, "\tilde\pi"'] & & U \\
\mathrm{Span}\langle v_i\otimes w_j\rangle \arrow[urr, dotted, "\exists!\psi"'] & &
\end{tikzcd}$$

$$\tilde\pi(v,w)=\tilde\pi\left(\sum x_i v_i, \sum y_j w_j\right)= \sum x_i y_j\, \tilde\pi(v_i,w_j) = \sum x_i y_j \text{ "}v_i\otimes w_j\text{"}$$

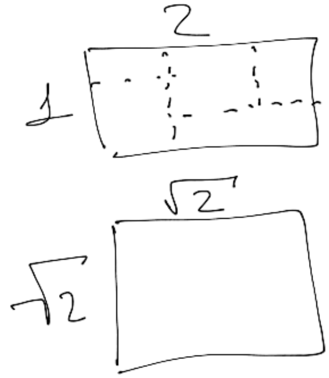
$$\psi\left(\sum x_i v_i, \sum y_j w_j\right) := \sum x_i y_j\, \varphi(v_i,w_j).$$

Предложение. Тензорное произв. однозначно определяется унив. св-вом.

$$\begin{tikzcd}
 & V\times W \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[dr, "\tilde\pi"] & \\
L/L_0 \arrow[rr, shift left, "\exists!\psi_1"] & & \mathrm{Span}(v_i\otimes w_j) \arrow[ll, shift left, "\exists!\psi_2"]
\end{tikzcd}$$

т.ч. диагр. комм-на. $\Rightarrow$ $\psi_1\circ\psi_2=\mathrm{Id}_{span}$, $\psi_2\circ\psi_1=\mathrm{Id}_{L/L_0}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\psi_1, \psi_2 \text{ — из-змы}}$ $\Rightarrow$

Приложение Можно ли разрезать прямоугольник



на прямоуг. так, чтобы из получ. прямоуг. получился квадрат той же площади?

Ответ нельзя!

Д-во: Ин-т Дена: $D\left(a\,\square^{b}\right) = a\otimes b \in \mathbb{R}\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{R}$.

где $\mathbb{R}$ — рассм. как вект. пр-во над $\mathbb{Q}$.

$$D(\text{объедин. прямоуг.}) := D(\square) + \ldots + D(\square).$$
$$\square \sqcup \ldots \sqcup \square$$

Ин-нт. Дена аддитивен, т.е. если разрезать прямоугольник на части, то D не изменится:

$$D\left(a\,\square^{b_1\,b_2}\right) = a\otimes(b_1+b_2) = a\otimes b_1 + a\otimes b_2$$
$$\|$$
$$D\left(a\,\square^{b_1} \sqcup a\,\square^{b_2}\right) = D\left(a\,\square^{b_1}\right) + D\left(a\,\square^{b_2}\right)$$

$$D\left(1\,\square^{2}\right) = 1\otimes 2 \overset{2\cdot(1\otimes 1)}{} \neq \sqrt{2}\otimes\sqrt{2} = D\left(\sqrt{2}\,\square^{\sqrt{2}}\right)$$

лин. нез., как эл-ты $\mathbb{R}\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{R}$, т.к. $1, \sqrt{2}$ лин. нез. над $\mathbb{Q}$.

Концептуальное (категорное) определение тензорного произведения

Теория категорий (экскурс).

Опр. Категория $\mathcal{C}$ состоит из

- Класс объектов $Ob(\mathcal{C})$
- Мн-во морфизмов $\forall A, B \in Ob(\mathcal{C})$

$$Hom_{\mathcal{C}}(A, B),$$

(Если $(A,B) \neq (A',B')$ то $Hom_{\mathcal{C}}(A,B) \cap Hom_{\mathcal{C}}(A',B') = \varnothing$)

(обозн: $\varphi: A \to B$ или $A \xrightarrow{\varphi} B$).

- Композиция морфизмов:

$$\circ: \underset{\substack{\Psi \\ f}}{Hom_{\mathcal{C}}(B,C)} \times \underset{\substack{\Psi \\ g}}{Hom_{\mathcal{C}}(A,B)} \to Hom_{\mathcal{C}}(A,B)$$

$$g \longrightarrow f \circ g.$$

Удовлетворяющих след. условиям:

- композиция ассоциативна: $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$

где $A \xrightarrow{h} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{f} D$

- $\forall A \in Ob(\mathcal{C}) \quad \exists\, 1_A \in Hom_{\mathcal{C}}(A,A)$

т.ч. $1_A \circ f = f$, $g \circ 1_A = g$

$\forall f \in Hom(B,A)$ $\quad g \in Hom(A,B)$.

Пример. Категория Sets — мн-ва.

Δ — конечные мн-ва с точн. до изо-зма.

$Ob(\Delta) = \{(1, \dots, n)\}$.

$Vect_{\mathbb{K}}$ — вект. пр-ва над заданным полем $\mathbb{K}$. (морф — линейные отобр).

Groups — группы (объекты — группы, морфизмы — морф. групп).

Ab — абелевы группы.

Top — категория топологич. пр-в. (морф — непрерывные отображ).

Пример! $\mathcal{C}_V = Hom_{\mathbb{K}}(V, -)$ — объекты — это пара $(U, \varphi: V \to U)$.

зафиксировано пр-во V.

морфизмы: $\psi \in Hom_{\mathcal{C}_V}(U_1, U_2)$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, equal] \arrow[d, "\varphi_1"] & V \arrow[d, "\varphi_2"] \\ U_1 \arrow[r, dashed, "\psi"] & U_2 \end{tikzcd}$$

т.ч. $\psi \circ \varphi_1 = \varphi_2$

Опр. Пусть $\mathcal{C}$ - категория, тогда

1) $\varphi \in Hom_{\mathcal{C}}(A, A)$ наз-ся эндоморфизмом A.

2) $\psi \in Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ наз-ся изоморфизмом, если $\exists \alpha \in Hom_{\mathcal{C}}(B, A)$ т.ч. $\alpha \circ \psi = 1_A$, $\psi \circ \alpha = 1_B$. ∎

Опр. Функтор $F: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ наз-ся след. набор данных: - отобр. $F: Ob(\mathcal{C}) \to Ob(\mathcal{D})$.

$$A \to F(A).$$

- отобр. $F: Hom_{\mathcal{C}}(A,B) \to Hom_{\mathcal{D}}(F(A),F(B))$. $\forall A,B \in Ob(\mathcal{C})$.

Такие, что:

- $F(1_A) = 1_{F(A)}$
- $F(f\circ g) = F(f)\circ F(g)$. $\forall\ A \xrightarrow{g} B \xrightarrow{f} C$

(ковариантный функтор).

Пример. $Vect_K \to \mathcal{C}_V$

$$U \to \begin{pmatrix} V \\ \downarrow 0 \\ U \end{pmatrix}.$$

Пример. Комплексификация: $Vect_{\mathbb{R}} \xrightarrow{} Vect_{\mathbb{C}}$.
Compl

$V_{\mathbb{R}} \to V_{\mathbb{C}}$

(v) $\qquad \{(v+iw) \mid v,w \in V_{\mathbb{R}}\}$.

(базис остался)

почему функтор:

$$\boxed{\begin{aligned}&(a+bi)(v+iw) := \\ &= (av - bw) + i(aw + bv).\end{aligned}}$$

$$\begin{array}{ccc} V_{\mathbb{R}} & \xrightarrow{Compl} & V_{\mathbb{C}} \\ A\downarrow & & \downarrow A \\ W_{\mathbb{R}} & \xrightarrow[Compl]{} & W_{\mathbb{C}} \end{array}$$

Если $v_1,\dots v_n$ базис в $V_{\mathbb{R}}$

то $v_1,\dots,v_n$ базис в $V_{\mathbb{C}}$. $\Rightarrow \dim_{\mathbb{C}} V_{\mathbb{C}} = \dim_{\mathbb{R}} V_{\mathbb{R}}$.

Овеществление: $Vect_{\mathbb{C}} \to Vect_{\mathbb{R}}$

$$V_{\mathbb{C}} \to V_{\mathbb{C}}$$

$\left.\begin{array}{l} v_1,\dots,v_n \\ iv_1,\dots,iv_n \end{array}\right\}$ базис над $\mathbb{R}$. $\Rightarrow \dim_{\mathbb{R}} V_{\mathbb{C}} = 2\dim_{\mathbb{C}} V_{\mathbb{C}}$. $\square$

Ковариантный / Контравариантный

$$A \xrightarrow{f} B \qquad\qquad A \xrightarrow{f} B$$

(обращает стрелки)

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$F(A) \xrightarrow{F(f)} F(B) \qquad\qquad F(A) \xleftarrow{F(f)} F(B)$$

Опр. по каждой категории $\mathcal{C}$ можно построить противоположную категорию

$$\mathcal{C}^{op} := \begin{cases} Ob(\mathcal{C}^{op}) = Ob(\mathcal{C}) \\ Hom_{\mathcal{C}^{op}}(A, B) := Hom_{\mathcal{C}}(B, A) \end{cases}$$

$$\left(\begin{matrix} \mathcal{C} \\ A \xrightarrow{f} B \end{matrix} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{matrix} \mathcal{C}^{op} \\ A \xleftarrow{f^{op}} B \end{matrix} \right)$$

Опр. $\left(\begin{matrix} \text{контравар. ф-р} \\ F : A \to B \end{matrix} \right) \leftrightarrow \left(\begin{matrix} F : A^{op} \to B \\ \text{ковар. ф-р.} \end{matrix} \right)$

Пример. $Hom_{\Bbbk}(-,-) : Vect_{\Bbbk}^{op} \times Vect_{\Bbbk} \to Vect_{\Bbbk}$

$$\begin{tikzcd} (V_1, W) \arrow[r] & Hom_{\Bbbk}(V_1, W) \\ (V_2, W) \arrow[u, leftarrow, "f"'] \arrow[r] & Hom_{\Bbbk}(V_2, W) \arrow[u, dashed, "f \circ -"'] \end{tikzcd}$$

Пример Функтор $\otimes : \mathrm{Vect}_{\Bbbk} \times \mathrm{Vect}_{\Bbbk} \to \mathrm{Vect}_{\Bbbk}$

$(V, W) \to V \otimes W$. (определялось унив. св-вом)

$$\left\{ \begin{array}{l} A : V_1 \to V_2 \\ B : W_1 \to W_2 \end{array} \right\}$$

Как построить $F(A,B)$

$$\begin{tikzcd} V_1 \times W_1 \arrow[r, dashed, "(A,B)"] \arrow[d, "\pi_1"] & V_2 \times W_2 \arrow[d, "\pi_2"] \\ V_1 \otimes W_1 \arrow[r, "\exists! \psi"'] & V_2 \otimes W_2 \end{tikzcd}$$

$$\psi \circ \pi(v_1, w_1) = \pi_2(Av_1, Bw_1).$$

Категорное определение тензорного произведения

Пусть $V_1, \ldots, V_k$ — набор вект. пр-в.

$\mathcal{C}_{V_1,\ldots,V_k}$ — категория k-линейных отображений

$$\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(V_1 \times \ldots \times V_k, U) \ni \varphi$$

(объект — это пара: (φ, U))

Морфизмы — $\psi : U_1 \to U_2$ т.ч.

$$\begin{tikzcd} V_1 \times \ldots \times V_k \arrow[r, equal] \arrow[d, "\varphi_1"] & V_1 \times \ldots \times V_k \arrow[d, "\varphi_2"] \\ U_1 \arrow[r, dashed, "\psi"'] & U_2 \end{tikzcd}$$

опр. Тензорным произведением $V_1 \otimes \ldots \otimes V_k$ называется универсальный отталкивающий (initial) объект кат. $\mathcal{C}_{V_1,\ldots,V_k}$

<u>Опр.</u> Объект $X \in Ob(\mathcal{C})$ наз-ся <u>универсальным отталкивающим</u> (initial) если $\forall\, Y \in Ob(\mathcal{C})$ $\# Hom_{\mathcal{C}}(X,Y) = 1$.

(соотв. универсальным притягивающим (final)) если $\forall\, Y \in Ob(\mathcal{C})$ $\# Hom_{\mathcal{C}}(Y,X) = 1$.

<u>Упр.</u> Все отталкив. объекты изоморфны "канонич".

$$X_1, X_2 \quad \# Hom(\overset{\varphi}{\underset{\in}{}} X_1, X_2) = \# Hom(\overset{\psi}{\underset{\in}{}} X_2, X_1) =$$

$$= Hom(X_1, X_1) = \# Hom(X_2, X_2)$$

$$\ni 1_{X_1} \qquad\qquad \ni 1_{X_2}$$

$$\varphi \circ \psi = 1_{X_2}, \quad \psi \circ \varphi = 1_{X_1}$$

<u>Замечание</u> $Fun(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ образуют категорию.

объекты — функторы.

морфизмы — (естеств. преобр).

$$\begin{array}{c} F : \mathcal{C} \to \mathcal{D} \\ \varepsilon \Downarrow \\ G : \mathcal{C} \to \mathcal{D} \end{array}$$

$X \in Ob(\mathcal{C})$

$$\varepsilon : F(X) \to G(X),$$ согласованное с морфизмами в $\mathcal{C}, \mathcal{D}$:

$$\left(X \xrightarrow{\varphi} Y \right) \rightsquigarrow \left(\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "F(\varphi)"] \arrow[d, "\varepsilon_X"'] & F(Y) \arrow[d, "\varepsilon_Y"] \\ G(X) \arrow[r, "G(\varphi)"] & G(Y) \end{tikzcd} \right)$$

<u>Пример.</u> Естеств. отображение $U^* \otimes V \underset{\varepsilon^{-1}}{\overset{\varepsilon}{\rightleftarrows}} \mathrm{Hom}(U,V)$ задаёт морфизм функторов. (эквивалентность (канонич. из-зм)).

$$\mathrm{Vect}^{op} \times \mathrm{Vect} \longrightarrow \mathrm{Vect}$$

$$\begin{tikzcd}
(U, V) \arrow[r] \arrow[dr] & U^* \otimes V \arrow[d, dashed, "\varepsilon"] \\
 & \mathrm{Hom}(U,V)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
U^* \times W \arrow[d, "\pi"] \arrow[dr] & \\
U^* \otimes W \arrow[r, "\exists !"] & \mathrm{Hom}(U,W)
\end{tikzcd}$$

$(\xi, w) \to (u \mapsto w\xi(u))$ - билин. отобр.

из-зм. т.к. нет ядра и $\dim$ совпадают.

$\square$.

<u>Ссылки</u>

И.М. Гельфанд „Лекции по лин. алгебре". (Тензорное произведение).

Маклейн „Категории для работающего математика".

Northcott „Introduction to hom. algebra"