Листок 5. 29 марта 2017

Если V — векторное пространство над полем комплексных чисел, то через $V_{\mathbb{R}}$ мы будем обозначать векторное пространство V, рассмотренное как векторное пространство над полем вещественных чисел.

Задача 1. Пусть $I\colon V_{\mathbb{R}} \to V_{\mathbb{R}}$ — оператор, определённый как $I(v) = iv$ (мы воспринимаем v как вектор из V, умножаем его на i и воспринимаем результат умножения как вектор из $V_{\mathbb{R}}$).
(а) Докажите, что $I^2 = -\mathrm{id}$. Какие его собственные числа?
(б) В комплексификации $V_{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C}$ оператор I диагонализуется. Пусть $V^{1,0}$ — собственное подпространство I для собственного числа $\sqrt{-1}$, а $V^{0,1}$ — для собственного числа $-\sqrt{-1}$. Докажите, что $V^{0,1} = \overline{V^{1,0}}$, что $V^{1,0} \cap V^{0,1} = 0$ и что линейная оболочка $V^{1,0}$ с $V^{0,1}$ есть всё пространство $V_{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C}$.
(в) Докажите, что построенное соответствие между эндоморфизмами вещественного векторного пространства W, равными в квадрате $-\mathrm{id}$, и подпространствами W' в $W \otimes \mathbb{C}$ такими, что $W' \cap \overline{W'} = 0$ и линейная оболочка W' с $\overline{W'}$ есть всё $W \otimes \mathbb{C}$, взаимно однозначно. Обе таких сущности называются *(линейной) комплексной структурой на векторном пространстве* W.

Комплексная структура на вещественном векторном пространстве W определяет структуру векторного пространства над полем комплексных чисел на множестве W.

Задача 2. Пусть (V, I) и (W, J) — векторные пространства с комплексными структурами на них, и $f\colon V \to W$ — вещественно-линейное отображение. Докажите, что следующие предложения равносильны:
(а) f определяет линейное отображение соответствующих комплексных векторных пространств;
(б) $f(Iv) = Jf(v)$;
(в) $f(V^{1,0}) \subseteq W^{1,0}$ (где мы молчаливо продолжили f до отображения комплексификаций $V \otimes \mathbb{C} \to W \otimes \mathbb{C}$).

Задача 3. Пусть V — ориентированное двумерное вещественное векторное пространство. Опишите многообразие (в топологии на эндоморфизмах конечномерного вещественного векторного пространства) комплексных структур на V таких, что какой-нибудь базис $\{v, Iv\}$ положительно ориентирован.

Задача 4. Пусть V — четырёхмерное евклидово пространство. Опишите многообразие (в топологии на эндоморфизмах евклидова пространства) комплексных структур на V, ортогональных относительно евклидовой метрики.

Предыдущие две задачи направлены на то, чтобы показать общий принцип: *пространства комплексных структур на геометрическом объекте сами допускают комплексные структуры* (на самом деле, они имеют канонические комплексные структуры).

Задача 5. (а) Пусть (V, g, I) — евклидово пространство с ортогональной комплексной структурой. Докажите, что билинейная форма ω, определённая законом $\omega(u, v) = g(Iu, v)$, кососимметрична.
(б) Пусть (V, g, I, ω) — евклидово пространство с ортогональной комплексной структурой и кососимметричной 2-формой ω такой, что $\omega(u, v) = g(Iu, v)$. Докажите, что

тройка (g, I, ω) может быть восстановлена по любым двум её составляющим.
(в) Докажите, что форма $h = g - \sqrt{-1}\omega$ является эрмитовой относительно комплексной структуры I.

Таким образом, вся тройка (g, I, ω) может быть восстановлена по одной только форме h. Такие тройки называются *кэлеровыми* (Kähler triples) в честь германского геометра Эриха Кэлера (1906—2000).

Задача 6. Пусть V — вещественное векторное пространство размерности $2n$ с какой-нибудь невырожденной кососимметрической билинейной 2-формой ω. Докажите, что многообразие (в топологии на эндоморфизмах конечномерного вещественного векторного пространства) комплексных структур I таких, что $g(u, v) := \omega(u, Iv)$ есть симметрическая положительно определённая форма можно отождествить с пространством симметрических $(g \times g)$-матриц с комплексными коэффициентами таких, что их мнимая часть положительно определена.

Это многообразие называется *верхним полупространством Зигеля* (Siegel upper-half space) в честь германского теоретика чисел Карла Людвига Зигеля (1896—1981).