КОМПЛЕКСНЫЙ АНАЛИЗ И ТЕОРЕМА РИМАНА

Contents

Вместо введения.

Курс посвящен теории голоморфных функций. Голоморфные функции описывают фундаментальные законы физики. Условие голоморфности (т.е. существования комплексной производной) оказывается значительно более ограничительным, чем условие существование вещественной производной. Такие функции обладают рядом общих красивых свойств, главное из которых состоит в том, что локальные свойства функции во многом определяют ее глобальные свойства. Это и позволяет делать важные естественно-научные предсказания путем математических рассуждений.

Мы начинаем с обсуждения различных определений голоморфности, эквивалентность которых априори не очевидна. Далее мы изучаем особые точки голоморфных функций. После этого мы исследуем свойства взаимно-однозначных (т.е. однолистных) функций. Главная теорема тут — это теорема Римана, о том, что произвольная односвязна область комплексной плоскости переводится с стандартный единичный диск некоторой взаимно-однозначной голоморфной функцией. Эта теорема играет фундаментальную роль в математике. Кроме того сама функция, переводящая область в круг, играет центральную роль в важных приложениях математики (гидромеханика, аэродинамика, теория потенциала)

Сначала мы приводим классическое доказательство существования такой функции, которое, к сожалению, не дает никаких рецептов построения этой функции. В конце курса мы опишем метод построения нужной однолистной функции для произвольной односвязной области с аналитической границей. Для этого нам понадобятся гармонические функции и функция Грина, очень полезные для решения разнообразных теоретических и прикладных проблем.

Далее мы переходим к описанию метода построения однолистной функции для односвязной области с аналитической границей. Этот метод появился совсем недавно [Вигман-Забродин-Маршаков-Натанзон 1999-2003]. Он основан на фундаментальных достижениях современной математической физики в теории интегрируемых систем и тесно связан с другими актуальными разделами математической физики: матричными интегралами, моделями двумерной гравитации и др.

Курс является записью лекций, которые автор читал в Независимом Московском Университете.

1. Голоморфные функции.

1.1. **Комплексная производная.** Далее под *областью* мы понимаем открытое связное подмножество. Соответствие $(x, y) \leftrightarrow z = x + iy$ между вещественной плоскостью $\mathbb{R}^2$ и комплексной плоскостью $\mathbb{C}$ позволяет рассматривать комплексно-значную функцию комплексного переменного как:

- отображение области комплексной плоскости $D \subset \mathbb{C}$ в комплексную плоскость $\mathbb{C}$ (обозначение $w = f(z)$).
- отображение области вещественной плоскости $D \subset \mathbb{R}^2$ в комплексную плоскость $\mathbb{C}$ (обозначение $w = f(x, y)$).
- отображение области вещественной плоскости $D \subset \mathbb{R}^2$ в вещественную плоскость $\mathbb{R}^2$ (обозначение $(u, v) = f(x, y)$, $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$).

Далее мы будем часто переходить от одной интерпретации к другой.

Определение 1.1. *Пусть f — отображение области комплексной плоскости $D \subset \mathbb{C}$ в комплексную плоскость $\mathbb{C}$ и $z_0 \in D$. Если предел*

$f'(z_0) = \lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$ *существует и конечен, то говорят, что* $f'(z_0)$ *есть комплексная производная* f *в точке* z_0.

Рассмотрим теперь f, как отображение области вещественной плоскости в вещественную плоскость. Тогда частная производная f по любому направлению будет также совпадать с $f'(z_0)=f'(x_0,y_0)$. Таким образом

$$f'(z_0)=\frac{\partial f}{\partial x}(z_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(u(x_0+\Delta x,y_0)+iv(x_0+\Delta x,y_0))-(u(x_0,y_0)+iv(x_0,y_0))}{\Delta x}=\frac{\partial u}{\partial x}(z_0)+i\frac{\partial v}{\partial x}(z_0),$$

$$f'(z_0)=\frac{\partial f}{\partial y}(z_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(u(x_0,y_0+\Delta y)+iv(x_0,y_0+\Delta y))-(u(x_0,y_0)+iv(x_0,y_0))}{i\Delta y}=-i\frac{\partial u}{\partial y}(z_0)+\frac{\partial v}{\partial y}(z_0).$$

Таким образом, доказана

Лемма 1.1. *Если f имеет комплексную производную в z_0, то в этой точке выполнены*

$$\boxed{\text{Условия Коши-Римана (Cauchy-Riemann): } \frac{\partial u}{\partial x}(z_0)=\frac{\partial v}{\partial y}(z_0); \frac{\partial v}{\partial x}(z_0)=-\frac{\partial u}{\partial y}(z_0).}$$

Введем теперь важные обозначения.

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial z}\equiv\frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}); \frac{\partial}{\partial \bar z}\equiv\frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y})}$$

Другими словами

$$\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{\partial(u+iv)}{\partial z}=\frac{\partial u}{\partial z}+i\frac{v}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}\right)+i\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-i\frac{\partial v}{\partial y}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\frac{1}{2}\left(-i\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial x}\right),$$

$$\frac{\partial f}{\partial \bar z}=\frac{\partial(u+iv)}{\partial z}=\frac{\partial u}{\partial \bar z}+i\frac{v}{\partial \bar z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial u}{\partial y}\right)+i\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial y}\right)=\frac{1}{2}i\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial x}\right)+i\frac{1}{2}i\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

Таким образом

Лемма 1.2. *Если функция f имеет комплексную производную в точке z_0, то* $\frac{\partial f}{\partial \bar z}(z_0)=0$ *и* $f'(z_0)=\frac{\partial f}{\partial z}(z_0)$.

1.2. **Дифференциал комплексной функции.**

Лемма 1.3. *Если функция $\mathbb{C}\supset D\xrightarrow{f}\mathbb{C}$ имеет комплексную производную в точке $z_0=x_0+iy_0$, то соответствующее отображение $\mathbb{R}^2\supset D\xrightarrow{f}\mathbb{R}^2$ дифференцируемо в точке (x_0,y_0) как отображение области вещественной плоскости в $\mathbb{R}^2$.*

Proof. Положим

$$\alpha(\Delta z)=\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}-f'(z_0).$$

Тогда $f(z_0+\Delta z)-f(z_0)=f'(z_0)\Delta z+\alpha(\Delta z)\Delta z=\left(\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}\right)(\Delta x+i\Delta y)+\alpha(\Delta z)\Delta z=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x-\frac{\partial v}{\partial x}\Delta y\right)+i\left(\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial u}{\partial x}\Delta y\right)+\alpha(\Delta z)\Delta z$

Следовательно $(u(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y),v(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y))-(u(x_0,y_0),v(x_0,y_0))=\begin{pmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & -\frac{\partial v}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Delta x\\ \Delta y\end{pmatrix}+o(|\Delta z|).$ □

Теорема 1.1. *Функция* $\mathbb{C} \supset D \xrightarrow{f} \mathbb{C}$ *имеет комплексную производную в точке* $z_0 = x_0 + iy_0$, *если и только если соответствующее отображение* $\mathbb{R}^2 \supset D \xrightarrow{f} \mathbb{R}^2$ *дифференцируемо и удовлетворяет условиям Коши-Римана.*

Proof. Пусть отображение $\mathbb{R}^2 \supset D \xrightarrow{f} \mathbb{R}^2$ дифференцируемо в точке (x_0, y_0). Тогда $(u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y), v(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)) - (u(x_0, y_0), v(x_0, y_0)) =$
$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} + o(|\Delta z|)$, где $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$.

Поэтому для $\mathbb{R}^2 \supset D \xrightarrow{f} \mathbb{C}$ имеем

$$\begin{aligned} f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) &= \left(\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y\right) + i\left(\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y\right) + o(|\Delta z|) = \\ &= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)(u + iv)\right](\Delta x + i\Delta y) + \\ &+ \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)(u + iv)\right](\Delta x - i\Delta y) + o(|\Delta z|) = \\ &= \frac{\partial f}{\partial z}\Delta z + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(\Delta x - i\Delta y) + o(|\Delta z|) \end{aligned}$$

Если отображение f удовлетворяет условиям Коши–Римана, то согласно вычислениям предыдущего раздела $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$, и, следовательно,

$$f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}\Delta z + o(|\Delta z|)$$

то есть функция f имеет комплексную производную в z_0.

Обратное утверждение следует из лемм 1.1 и 1.3. □

Теорема 1.2. *Пусть функции* $\mathbb{C} \supset D \xrightarrow{f,g} \mathbb{C}$ *имеют комплексные производные в точке* z_0. *Тогда функции* $f \pm g, f \cdot g$ *и* $\frac{f}{g}$ *(если* $g(z_0) \neq 0$*) имеют комплексные производные в точке* z_0, *причем* $(f \pm g)'(z_0) = f'(z_0) \pm g'(z_0)$, $(fg)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0)$, $(\frac{f}{g})'(z_0) = \frac{f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{g^2(z_0)}$.

Теорема 1.3. *Пусть* $\mathbb{C} \supset D \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} \mathbb{C}$, $V \subset \mathbb{C}$, *причем функция* f *имеет комплексную производную в точке* z_0, *а* g *— в точке* $f(z_0)$. *Тогда функция* $\phi(z) = g(f(z))$ *имеет комплексную производную в* z_0 *и* $\phi'(z_0) = g'(f(z_0))f'(z_0)$.

Задача 1.1. *Доказать теоремы 1.2 и 1.3. Эти доказательства дословно повторяют доказательства соответствующих теорем вещественного анализа.*

1.3. **Голоморфность.**

Определение 1.2. *Говорят, что функция* $D \xrightarrow{f} \mathbb{C}$ *голоморфна в области* $D \subset \mathbb{C}$, *если она имеет комплексную производную в каждой точке* $z \in D$. *Говорят, что функция* f *голоморфна в точке* z_0, *если она голоморфна в некоторой окрестности* $V \ni z_0$ *точки* z_0.

Примеры голоморфных функций:
1. $f(z) = const$, $f'(z) = 0$.
2. $f(z) = az$, где $a \neq 0$. Если $a = re^{i\phi}$, то f поворачивает плоскость $\mathbb{C}$ на угол ϕ вокруг точки 0 и растягивает плоскость в r раз.

3. $f(z) = z^n$. Функция f увеличивает угол между лучами, выходящими из точки 0, в n раз.

Задача 1.2. *Если $f'(z) = 0$ на всей на области $D \subset \mathbb{C}$, то $f = const$ на D.*

Если $f'(z_0) \neq 0$, то в малой окрестности точки z_0 функция f действует почти так, как в примере 2, то есть

Задача 1.3. *Пусть $f'(z_0) \neq 0$. Доказать, что функция f сохраняет величину угла между кривыми, пересекающимися в z_0.*

Определение 1.3. *Отображения, сохраняющие величину угла, называются конформными.*

Как и в вещественном случае, можно рассматривать последовательности и ряды комплексных функций $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$. Все определения и теоремы дословно переносятся на комплексный случай, если вместо интервала $\{x \in \mathbb{R} | |x - x_0| < r\}$ рассматривать диск $\{z \in \mathbb{C} | |z - z_0| < r\}$.

Задача 1.4. *Доказать, что если ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n'(z)$ сходится равномерно в области $D \subset \mathbb{C}$, а ряд $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z)$ сходится хотя бы в одной точке области, то ряд $f(z)$ сходится равномерно в области D и $f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n'(z)$.*

Нас будут интересовать в основном степенные ряды $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$, $c_n \in \mathbb{C}$.

Задача 1.5. *Пусть $\frac{1}{R} = \overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}$. Тогда степенной ряд $f(z)$ абсолютно сходится на $D = \{z \in \mathbb{C} | |z - z_0| < R\}$ и расходится на $D = \{z \in \mathbb{C} | |z - z_0| > R\}$. На любом компакте $K \subset D$ ряд $f(z)$ сходится равномерно.*

Положим:

$$e^z = \exp z = \lim_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

$$\cos z = \lim_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$$

$$\sin z = \lim_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$$

Задача 1.6. *Доказать, что функции $e^z, \mathbb{C}osz, \sin z$ существуют и голоморфны на всей плоскости $\mathbb{C}$. Найти для каждой из функций область D такую, что $f(D) = \mathbb{C}$.*

1.4. **Комплексное интегрирование.** Под *кривой* (или *путем*) мы будем понимать ориентированный образ кусочно–гладкого отображения отрезка $[\alpha, \beta]$ в плоскость $\mathbb{C}$. Замкнутая кривая называется *контуром.* В вещественном случае интеграл по кривой — это предел при $\max \Delta z_k \to 0$ интегральных сумм $S = \sum_{k=0}^{n} f(\xi_k) \Delta z_k$, где ξ_k — точки, разбивающие кривую γ, а Δz_k — отрезки, соединяющие эти точки. Если формально считать аргумент и функцию комплексным числом, то получится комплексный интеграл по кривой $\gamma \subset \mathbb{C}$. При этом

$$S = \sum_{k=0}^{n} \big(u(\xi_k) + iv(\xi_k)\big)(\Delta x + i\Delta y) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \big(u(\xi_k)\Delta x_k - v(\xi_k)\Delta y_k\big) + i\big(u(\xi_k)\Delta y_k + v(\xi_k)\Delta x_k\big).$$

Таким образом, мы приходим к следующему определению

Определение 1.4. *Интегралом функции* $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ *по кривой* $\gamma \subset \mathbb{C}$ *называется комплексное число*

$$\int_\gamma f(z)\,dz \overset{def}{=} \int_\gamma (udx - vdy) + i\int_\gamma (udy + vdx)$$

Если $w : [\alpha,\beta] \to \mathbb{C}$ — гладкая параметризация кривой γ и $w(t) = x(t) + iy(t)$, то

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\alpha^\beta \big(u(w(t))x'(t)dt - v(w(t))y'(t)dt\big) + \\ + i\int_\alpha^\beta \big(u(w(t))y'(t)dt + v(w(t))x'(t)dt\big) = \int_\alpha^\beta f(w(t))w'(t)dt.$$

В частности, правая часть не зависит от параметризации $w(t)$.

Пример 1.1. *Пусть* $\gamma = \{z \in \mathbb{C} | |z-a| = r\} = \{a + re^{it} | t \in [0,2\pi]\}$. *Тогда*

$$\int_\gamma (z-a)^n dz = r^{n+1} i \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t} dt = \begin{cases} 0, & n \neq -1 \\ 2\pi i, & n = -1. \end{cases}$$

Пример 1.2. *Пусть* $n \neq -1$ *и* $\gamma \subset \mathbb{C}$ — *путь из* a *в* b. *Рассмотрим его параметризацию* $w = w(t)$. *Тогда*

$$\int_\gamma z^n dz = \int_\alpha^\beta w^n(t)w'(t)dt = \frac{1}{n+1}\int_\alpha^\beta \left(\frac{d}{dt}(w^{n+1}(t))\right) dt = \\ = \frac{1}{n+1}(w^{n+1}(\beta) - w^{n+1}(\alpha)) = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1}.$$

Через $\int_\gamma |f||dz|$ будет обозначаться интеграл по длине дуги $\int_\alpha^\beta |f||z'(t)|dt$.

Из определения очевидна

Теорема 1.4. *При изменении ориентации кривой* γ*, интеграл меняет знак.*

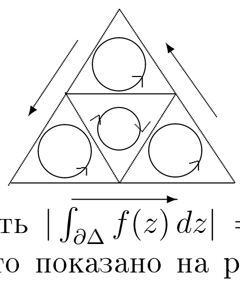
$$\int_\gamma (af + bg)\,dz = a\int_\gamma f\,dz + b\int_\gamma g\,dz,\ \int_{\gamma_1 \cup \gamma_2} f\,dz = \int_{\gamma_1} f\,dz + \int_{\gamma_2} f\,dz,$$

$|\int_\gamma f\,dz| \le \int_\gamma |f|\,|dz|$. *В частности, если* $|f(z)| \le M$, *то* $|\int_\gamma f\,dz| \le M|\gamma|$, *где* $|\gamma|$ — *длина дуги.*

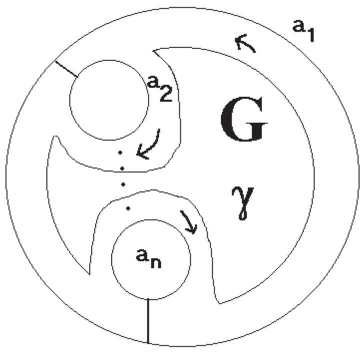
1.5. **Теорема Коши.**

Лемма 1.4. *Пусть функция* $f(z)$ *голоморфна в области* D. *Тогда для любого треугольника* $\Delta \subset D$ $\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0$.

Proof.



Пусть $|\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz| = M > 0$. Разобьём Δ на 4 треугольника a_1, a_2, a_3, a_4 так, как это показано на рисунке. Тогда $M = |\sum_{i=1}^n \int_{\partial a_i} f(z)\,dz| \le \sum_{i=1}^n |\int_{\partial a_i} f(z)\,dz|$. Значит, для одного из треугольников $\Delta_1 \in \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ выполнено неравенство $|\int_{\partial\Delta_1} f\,dz| \ge \frac{1}{4}M$. Продолжая, находим последовательность треугольников $\Delta \supset \Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \dots$ таких, что $|\int_{\partial\Delta_n} f(z)\,dz| \ge \frac{1}{4^n}M$.



Пусть $z_0 \in \bigcap \Delta_i \subset D$. Положим $\alpha(z) = \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} - f'(z_0)$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое что $|a(z)| < \varepsilon$ при $0 < |z - z_o| < \delta$. Пусть $\Delta_n \subset \{z \in \mathbb{C} | |z - z_0| < \delta\}$, тогда согласно примеру 1.1:

$$\left| \int_{\partial\Delta_n} f(z)\, dz \right| = \left| \int_{\partial\Delta_n} f(z_0)\, dz + \int_{\partial\Delta_n} f'(z_0)(z - z_0)\, dz + \int_{\partial\Delta_n} \alpha(z)(z - z_0)\, dz \right| =$$

$$= \left| \int_{\partial\Delta_n} \alpha(z)(z - z_0)\, dz \right| \le \int_{\partial\Delta_n} |\, \alpha(z)|\, |\, z - z_0|\, |\, dz| \le \varepsilon\, |\, \partial\Delta_n|^2 =$$

$$= \varepsilon \left(\frac{|\, \partial\Delta|}{2^n} \right)^2 = \varepsilon \frac{|\, \partial\Delta|^2}{4^n}.$$

Таким образом, $\frac{1}{4^n} M \le \left| \int_{\partial\Delta_n} f(z)\, dz \right| \le \varepsilon \frac{|\partial\Delta|^2}{4^n}$ откуда $M \le \varepsilon\, |\partial\Delta|^2$ и, следовательно $M = 0$. □

Теорема 1.5 (Коши). *Пусть функция $f(z)$ голоморфна в области D и $\gamma \subset D$ — замкнутый путь, гомотопный нулю. Тогда $\int_\gamma f(z)\, dz = 0$.*

Proof. Контур γ ограничивает область Q. Если γ — ломаная, состоящая из отрезков, то область Q может быть разбита на конечное число треугольников $\Delta_i \subset D$. Согласно лемме 1.4, $\int_\gamma f(z)\, dz = \sum_{i=1}^n \int_{\Delta_i} f(z)\, dz = 0$. Интеграл по произвольному пути является пределом интегралов по ломаным. □

Замечание 1.1. *Для функций f с непрерывной производной $f'(z)$ теорему Коши можно доказывать, используя формулу Грина.*

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \int_{\partial Q} (udx - vdy) + i \int_{\partial Q} (udy + vdx) =$$

$$= \iint\limits_Q \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dxdy + i \iint\limits_Q \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dxdy = 0.$$

Такое доказательство, не подходит однако для последовательного изложения комплексного анализа. Дело в том, что теорема Коши используется в дальнейшем, для доказательства непрерывности производной любой голоморфной функции.

Теорема 1.6. *Пусть функция f голоморфна в области D и $G \subset D$ — компакт, ограниченный конечным числом замкнутых контуров. Тогда $\int_{\partial G} f(z)\, dz = 0$.*

Proof. Соединим граничные компоненты множества G отрезками $\delta_1, \dots, \delta_m \subset G$ таким образом, чтобы множество $\widetilde{G} = G \setminus \bigcup_{i=1}^{m} \delta_i$ стало односвязным (см.рисунок). Тогда согласно теореме 1.5

$$0 = \int_{\partial \widetilde{G}} f(z)dz = \int_{\partial G} f(z)dz.$$

□

1.6. **Первообразная.**

Определение 1.5. *Первообразной функции $f(z)$ в области D называется голоморфная в D функция $F(z)$ такая, что $F'(z) = f(z)$.*

Задача 1.7. *Пусть F — первообразная для f. Доказать, что Φ — первообразная для f, если и только если $\Phi = F + const$.*

Лемма 1.5. *Пусть функция $f(z)$ голоморфна в круге $D = \{z \in \mathbb{C} | |z-a| < r\}$. Тогда $F(z) = \int_{[a,z]} f(w)\, dw$ — первообразная для f в D.*

Proof. Пусть $z + h \in D$. Тогда, согласно лемме 1.4 и примеру 1.2:

$$F(z+h) - F(z) = \int_{[a,z+h]} f(w)\, dw \; - \int_{[a,z]} f(w)\, dw \; = \int_{[z,z+h]} f(w)\, dw \; =$$

$$= \int_{[z,z+h]} f(z)\, dw \; + \int_{[z,z+h]} \big(f(w) - f(z)\big)\, dw = f(z)h \; + \int_{[z,z+h]} (f(w) - f(z))\, dw.$$

Таким образом,

$$\left| \frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) \right| \leq \frac{1}{|h|} \int_{[z,z+h]} |\alpha(h)|\, |dh|,$$

где $\alpha(h) = f(z+h) - f(z)$. Ввиду непрерывности f для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое что $|\alpha(h)| < \varepsilon$ при $|h| < \delta$. Таким образом, $\left| \frac{F(z+h)-F(z)}{h} - f(z) \right| \leq \frac{1}{|h|} \varepsilon |h| = \varepsilon$ при $|h| < \delta$, то есть $F'(z) = f(z)$. □

Определение 1.6. *Пусть функция f голоморфна в области D. Первообразной f вдоль кривой $\gamma \subset D$ называется непрерывная функция $\Phi(z)$ на γ, являющаяся ограничением функции, первообразной к f в некоторой области $\subset U \subset D$, содержащей γ.*

Теорема 1.7. *Пусть f голоморфна в области D и $\gamma \subset D$ — кривая с началом a и концом b. Тогда f имеет первообразную $\Phi(z)$ вдоль γ, причем $\Phi(b) - \Phi(a) = \int_\gamma f(z)\, dz$.*

Proof. Кривая γ является образом отрезка $[0,1]$ под действием непрерывной функции $z : [0,1] \to D$. Ввиду равномерной непрерывности функции z отрезок $[0,1]$ можно покрыть интервалами $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ так, чтобы их образы $z(\alpha_i)$ содержались в круге $D_i \subset D$, где $D_i \cap D_j \neq \emptyset$, если и только если $|i-j| = 1$. Используя лемму 1.5, выберем на каждом диске D_i первообразную $\tilde{\Phi}_i(z)$. Согласно утверждению из задачи 1.7, эти первообразные можно выбрать таким образом, чтобы они совпадали на всех пересечениях дисков. Тогда на объединении дисков U возникнет нужная первообразная Φ. Равенство $\Phi(b) - \Phi(a) = \int_\gamma f(z)\, dz$ следует из явно конструкции первообразной использованной в лемме 1.5. □

Теорема 1.8. *Функция f, голоморфная в связной односвязной области D, имеет в этой области первообразную F, причем $\int_\gamma f(z)\,dz = F(b) - F(a)$ для любого пути $\gamma \subset D$ с началом a и концом в b.*

Proof. Пусть $a \in D$. Для $z \in D$ положим $F(z) = \int_{\gamma_z} f(w)\,dw$, где путь $\gamma_z \subset D$ соединяет a и z. Согласно теореме 1.5, определение не зависит от γ и, следовательно, корректно. Согласно лемме 1.5 и теореме 1.7 $F'(z) = f(z)$ и $\int_\gamma f(z)\,dz = F(b) - F(a)$. □

1.7. **Интегральная формула Коши.**

Теорема 1.9 (о среднем). *Пусть функция f голоморфна в области D и $G = \{z \in \mathbb{C} | |z - z_0| \le r\} \subset D$. Тогда*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial G} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it})\,dt.$$

Proof. Ввиду непрерывности функции f для любого $\varepsilon > 0$ существует $r > \rho > 0$ такое что $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ при $|z - z_0| \le \rho$. Положим $G_\rho = \{z \in \mathbb{C} | |z - z_0| \le \rho\}$. Согласно теореме 1.6: $0 = \int_{\partial G} \frac{f(z)}{z-z_0} dz - \int_{\partial G_\rho} \frac{f(z)}{z-z_0} d$. Поэтому, согласно примеру 1.1

$$f(z_0) - \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial G} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = f(z_0) - \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial G_\rho} \frac{f(z)}{z - z_0} dz =$$
$$= f(z_0)\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial G_\rho} \frac{dz}{z - z_0} - \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial G_\rho} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial G_\rho} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz.$$

Таким образом,

$$\left| f(z_0) - \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial G} \frac{f(z)}{z - z_0} dz \right| \le \frac{1}{2\pi}\int_{\partial G_\rho} \frac{\varepsilon}{\rho} |dz| = \varepsilon.$$

и

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial G} \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

Подставляя $z = z_0 + re^{it}$, находим, что

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial G} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{it})}{re^{it}} \cdot (z_0 + re^{it})' dt =$$
$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it})\,dt. \quad \square$$

Теорема 1.10 (Формула Коши). *Пусть функция f голоморфна в области D и $G \subset D$ — компакт, ограниченный конечным числом контуров. Тогда*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial G} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \begin{cases} f(z_0), & \text{если } z_0 \in G \setminus \partial G, \\ 0, & \text{если } z_0 \notin G. \end{cases}$$

Proof. Если $z_0 \notin G$, то утверждение следует из теоремы 1.6. Если $z_0 \in G \setminus \partial G$, то рассмотрим $U = \{z \in \mathbb{C} | |z - z_0| \le r\} \subset G \setminus \partial G$. Тогда по теоремам 1.9 и 1.6:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial U}\frac{f(z)}{z-z_0}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial U}\frac{f(z)}{z-z_0}dz + \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial(G\setminus U)}\frac{f(z)}{z-z_0}dz =$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial G}\frac{f(z)}{z-z_0}dz. \quad \square$$

1.8. **Разложение в ряд Тейлора.**

Теорема 1.11. *Пусть функция f голоморфна в области D и $G = \{z \in \mathbb{C} | |z - z_0| < R\} \subset D$. Тогда функция f совпадает на G с суммой ряда $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$, где $c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$ и $\gamma = \{z \in \mathbb{C} | |z - z_0| = r < R\}$.*

Proof. Согласно теореме 1.6, c_n не зависит от выбора $r < R$. Пусть $z \in G$ и $|z - z_0| < r$. Рассмотрим ряд

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{(w-z_0)\left(1 - \frac{z-z_0}{w-z_0}\right)} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}}.$$

Если $w \in \gamma$,то

$$\left|\frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}}\right| = \frac{1}{|z-z_0|}\left(\left|\frac{z-z_0}{w-z_0}\right|\right)^{n+1} = \frac{\rho^{n+1}}{|z-z_0|},$$

где $\rho = \frac{|z-z_0|}{r} < 1$. Таким образом, ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}}$ мажорируется абсолютно сходящимся и, следовательно, сходится равномерно по w на γ. Функция $f(w)$ ограничена на γ, и, следовательно, ряд $\sum_{n=0}^{\infty} f(w)\frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}}$ также сходится равномерно по w на γ. В частности, его можно почленно проинтегрировать, что по формуле Коши дает

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}dw = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \sum_{n=0}^{\infty} f(w)\frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}}dw =$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}(z-z_0)^n\int_\gamma \frac{f(w)}{2\pi i}\frac{dw}{(w-z_0)^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n. \quad \square$$

Теорема 1.12. *Пусть $\frac{1}{R} = \overline{\lim}_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|} < \infty$. Тогда функция $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ существует и голоморфна в круге $D = \{z \in \mathbb{C} | |z - z_0| < R\}$, причем функция $f'(z)$ также голоморфна в D.*

Proof. Положим $\phi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n(z-z_0)^{n-1}$. Ввиду

$$\overline{\lim}_{n\to\infty}\sqrt[n]{n|c_n|} = \overline{\lim}_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|} = \frac{1}{R},$$

функция $\phi(z)$ определена на D и равномерно сходится на компактах в D. Значит, $\phi(z)$ можно почленно интегрировать по путям в D. Положим

$$F(z)=\int_{[z_0,z]}\phi(w)dw=\int_{[z_0,z]}\sum_{n=1}^{\infty}nc_n(w-z_0)^{n-1}dw=$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}nc_n\int_{[z,z_0]}(w-z_0)^{n-1}dw=\sum_{n=1}^{\infty}nc_n\frac{1}{n}(w-z_0)^n|_{w=z_0}^{w=z}=f(z)-c_0.$$

С другой стороны:

$$F(z+h)-F(z)=\int_{[z,z+h]}\phi(w)\,dw=\sum_{n=1}^{\infty}nc_n\int_{[z,z+h]}(w-z_0)^{n-1}dw=$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}c_n(w-z_0)^n|_z^{z+h}=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\left[(z+h-z_0)^n-(z-z_0)^n\right]=h\sum_{n=1}^{\infty}nc_n(z-z_0)^{n-1}+h^2g(z)$$

Таким образом,

$$f'(z)=\lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{F(z+h)-F(z)}{h}=\sum_{n=1}^{\infty}nc_n(z-z_0)^{n-1}=\phi(z)$$

. Мы доказали, что $f'(z)$ существует и представляется рядом с теми же свойствами, что и $f(z)$. Следовательно, $f^{(2)}(z)$ тоже существует, то есть $f'(z)$ — голоморфна в D. □

1.9. **Критерий голоморфности.**

Теорема 1.13. *Пусть функция f голоморфна в области D. Тогда она имеет там комплексные производные всех порядков, они голоморфны и*

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int_{\partial U}\frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}dw \quad ,\ \text{где } U=\{w\in\mathbb{C}||w-z|\le r\}\subset D$$

Proof. Пусть $z_0\in D$ и $G=\{z\in\mathbb{C}||z-z_0|\le R\}\subset D$. Согласно теореме 1.11, функция $f(z)$ представляется на G в виде ряда $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$. Поэтому согласно теореме 1.12, функция $f'(z)$ голоморфна на $G\setminus\partial G$. Повторяя рассуждение, доказываем голоморфность $f^{(n)}(z)$ при всех n. Повторяя рассуждение вещественного анализа, находим, что $c_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(z_0)$. Сопоставив с теоремой 1.11, получим формулы для $f^{(n)}(z)$. □

Теорема 1.14. *Пусть $U=\{z\in\mathbb{C}||z-a|<r\}$ и $f:U\to\mathbb{C}$. Тогда следующие 3 условия эквивалентны:*

(1) *функция f голоморфна в U, то есть имеет комплексную производную в каждой точке U.*
(2) *функция f непрерывна в U и интеграл по границе любого треугольника $\Delta\subset U$ равен 0.*
(3) *$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n$ на U.*

Proof. (1)⇒(2) — это теорема 1.5, (1)⇒(3) — это теорема 1.11, (3)⇒(1) — это теорема 1.12. Докажем

(2)⇒(1) (Теорема Морера). Положим $F(z) = \int_{[a,z]} f(w)\,dw$. Тогда $F(z+h) - F(z) = \int_{[z,z+h]} f(w)\,dw$ и

$$\left|\frac{F(z+h)-F(z)}{h} - f(z)\right| = \frac{1}{|h|}\left|\int_{[z,z+h]} f(w)\,dw - hf(z)\right| \le$$
$$\le \frac{1}{|h|}\left|\int_{[z,z+h]} (f(w)-f(z))dw\right| \le \frac{1}{|h|}\max_{[z,z+h]}|f(w)-f(z)|\cdot|h| = \max_{[z,z+h]}|f(w)-f(z)|.$$

Поэтому непрерывность функции f в точке z влечет дифференцируемость функции F в точке z и равенство $F'(z) = f(z)$. Таким образом, функция $F(z)$ — голоморфна на U. Согласно теореме 1.13, отсюда следует голоморфность функции $f(z)$. □

Таким образом, в отличие от гладких функций вещественного переменного, голоморфные функции определяются счетным множеством чисел. Эти числа определяются поведением функции в окрестности точки и, следовательно, поведение функции в окрестности точки определяет всю функцию. Более того, эти числа можно найти интегрированием о контуру, что иногда удобней, чем дифференцирование.

1.10. **Теорема Вейерштрасса.**

Теорема 1.15 (Вейерштрасс)**.** *Пусть функции $\{f_n(z)\}$ голоморфны в области D и ряд $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ равномерно сходится на любом компакте, лежащем в D. Тогда функция f голоморфна и $f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n'(z)$.*

Proof. Для произвольной точки $a \in D$ рассмотрим замкнутый диск $U = \{z \in \mathbb{C}||z-a| \le R\} \subset D$. Если $\gamma \subset U$ — граница треугольника, то ввиду равномерной сходимости: $\int_\gamma f(z)\,dz = \sum_{n=0}^{\infty}\int_\gamma f_n(z)\,dz$ и, согласно теореме 1.14, $f(z)$ — голоморфна на U. Кроме того, согласно теореме 1.13,

$$f'(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial U}\frac{f(z)}{(z-a)^2}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial U}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f_n(z)}{(z-a)^2}dz =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial U}\frac{f_n(z)}{(z-a)^2}dz = \sum_{n=0}^{\infty} f_n'(a).$$

□

Таким образом, в отличие от гладких функций вещественного переменного, множество голоморфных функций замкнуто относительно равномерного предела.

2. Мероморфные функции.

2.1. Функции голоморфные в кольце. Ряды Лорана. Перейдем теперь к изучению свойств функций, голоморфных в неодносвязных областях.

Теорема 2.1. *Пусть функция $f(z)$ голоморфна в кольце $V = \{0 \le r < |z-a| < R \le \infty\}$. Тогда на V*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n,$$

где
$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\rho}\frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}dw$$
и
$$\gamma_\rho = \{z\in\mathbb{C}||z-a|=\rho\}\subset V.$$

Proof. Пусть $z\in V$ и $U=\{w\in V|\alpha\le|w-a|\le\beta\}\ni z$. По формуле Коши
$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial U}\frac{f(w)}{(w-z)}dw = f_\beta(z)-f_\alpha(z),$$
где
$$f_\beta(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\beta}\frac{f(w)}{w-z}dw=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\beta}f(w)\frac{1}{(w-a)\left(1-\frac{z-a}{w-a}\right)}dw=$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\beta}f(w)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-a)^n}{(w-a)^{n+1}}dw=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n,$$

$$f_\alpha(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\alpha}\frac{f(w)}{w-z}dw=-\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\alpha}\frac{f(w)}{(z-a)\left(1-\frac{w-a}{z-a}\right)}dw=$$
$$=-\int_{\gamma_\alpha}\frac{f(w)}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(w-a)^n}{(z-a)^{n+1}}dw=$$
$$=-\int_{\gamma_\alpha}\frac{f(w)}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-a)^{-(n+1)}}{(w-a)^{-n}}dw=-\sum_{n=1}^{\infty}c_{-n}(z-a)^{-n}.\quad\square$$

Определение 2.1. *Ряд* $\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-a)^n$ *называется рядом Лорана с правильной частью* $\sigma_1=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n$ *и главной частью* $\sigma_2=\sum_{n=-\infty}^{-1}c_n(z-a)^n$.

Теорема 2.2. *Ряд Лорана* $\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-a)^n$ *задает функцию, голоморфную в кольце* $V=\{z\in\mathbb{C}|r<|z-a|<R\}$*, где* $r=\overline{\lim}_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|c_{-n}|}$ *и* $R=\frac{1}{\overline{\lim}_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|c_n|}}$.

Proof. По теореме Абеля функция σ_1 и функция σ_2 сходятся равномерно на любом компакте в V. Поэтому по теореме Вейерштрасса функции σ_1 и σ_2 голоморфны в кольце V. $\square$

Теорема 2.3 (Неравенство Коши)**.** *Пусть функция* $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-a)^n$ *голоморфна в кольце* $V=\{z|r<|z-a|<R\}$ *и* $\gamma_\rho=\{z||z-a|=\rho\}\subset V$.
$$\text{Тогда } c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\rho}\frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}dw \text{ и } |c_n|\le\frac{M}{\rho^n}\text{ , где } M=\max_{\gamma_\rho}|f|$$

Proof. Согласно примеру 1.1,
$$\int_{\gamma_\rho}\frac{f(z)dz}{(z-a)^{n+1}}=\int_{\gamma_\rho}\sum_{m=-\infty}^{\infty}c_m(z-a)^m\frac{dz}{(z-a)^{n+1}}=2\pi ic_n$$
Таким образом $|c_n|\le\frac{1}{2\pi}\int_{\gamma_\rho}\frac{|f(z)|}{\rho^{n+1}}|dz|=\frac{1}{2\pi}\frac{M}{\rho^{n+1}}2\pi\rho=\frac{M}{\rho^n}$. $\square$

Теорема 2.4 (Лиувилль)**.** *Если функция голоморфна на всей плоскости и ограничена, то она постоянна.*

Proof. Пусть $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ и $|f(z)| \leq M$. Тогда по неравенству Коши $|c_n| \leq \frac{M}{\rho^n}$ для всех $\rho > 0$. $\square$

2.2. **Изолированные особые точки.**

Определение 2.2. *Говорят, что $a \in \mathbb{C}$ — изолированная особая точка функции $f(z)$, если функция f голоморфна в некоторой проколотой окрестности $\{z \in |0 < |z-a| < r\}$ точки a. Особая точка a называется устранимой, если $\lim_{z\to a} f(z) = A \in \mathbb{C}$, полюсом, если $\lim_{z\to a} f(z) = \infty$, и существенно особой в остальных случаях.*

Теорема 2.5. *Пусть a — изолированная особая точка функции $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n$. Тогда*

(1) *Следующие условия эквивалентны: а) a — устранимая особая точка; б) $|f(z)| \leq M$ в некоторой окрестности точки a; в)$c_n = 0$ при $n < 0$.*
(2) *Следующие условия эквивалентны: а) a — полюс; б) существует $N < 0$ такое, что $c_N \neq 0$ и $c_n = 0$ при $n < N$.*

Proof. 1. Очевидно, что из а) следует б) и из в) следует а). Докажем, что из б) следует в). Пусть $|f(z)| \leq M$ в некоторой окрестности точки a. Тогда согласно неравенству Коши $|c_n| \leq \frac{M}{\rho^n}$ для любого $0 < \rho < 1$. Следовательно, $c_n = 0$ при $n < 0$, то есть из б) следует в).
2. Пусть a — полюс. Тогда в некоторой окрестности точки a $|f(z)| \neq 0$, и, следовательно, в этой окрестности функция $\phi(z) = \frac{1}{f(z)}$ голоморфна. Согласно уже доказанному утверждению 1, отсюда следует, что $\phi(z) = (z-a)^{-N} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$, где $c_0 \neq 0$ и $N < 0$. Таким образом, $f(z) = \frac{1}{\phi(z)} = (z-a)^N \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-a)^n$, где $b_0 \neq 0$. Обратное утверждение очевидно. $\square$

Таким образом голоморфные функции с устранимыми особыми точками превращается в голоморфную, если правильно определить ее в особых точках.

Определение 2.3. *Если $f(z) = (z-a)^N \cdot \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ и $c_0 \neq 0$, то при $N > 0$ число N называется порядком нуля, а при $N < 0$ число $-N$ называется порядком полюса функции $f(z)$ в точке a.*

Задача 2.1. *Функция f имеет полюс порядка N в точке , если и только если функция f^{-1} имеет 0 порядка N в точке a.*

Теорема 2.6 (Сохоцкий)**.** *Пусть a — существенная особая точка функции f и $A \in \mathbb{C} \cup \infty$. Тогда существует последовательность $a_n \to a$ такая, что $f(a_n) \to A$.*

Proof. Пусть $A = \infty$. Тогда утверждение теоремы следует из неограниченности функции f в любой окрестности точки a. Пусть $A \in \mathbb{C}$. Тогда или 1) существует последовательность $a_n \to a$ такая, что $f(a_n) = A$ или 2) существует проколотая окрестность точки a, где $f(z) \neq A$. В последнем случае, в этой окрестности функция $\phi(z) = \frac{1}{f(z)-A}$ голоморфна, и a — ее существенная особая точка. Значит, как уже доказано, существует последовательность $a_n \to a$ такая, что $\phi(a_n) \to \infty$. Но тогда $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} \left(A + \frac{1}{\phi(a_n)}\right) = A$. $\square$

Определение 2.4. *Говорят, что ∞ — изолированная особая точка функции $f(z)$, если функция f — голоморфна в некоторой окрестности $\{R < |z| < \infty\}$ точки ∞.*

Для таких точек сохраняется та же классификация: устранимые особые точки, полюсы и существенно особые точки.

Задача 2.2. *Точка ∞ — изолированная особая точка функции $f(z)$, если и только если 0 — изолированная особая точка функции $g(z) = f(z^{-1})$.*

Определение 2.5. *Функция голоморфная на всей плоскости $\mathbb{C}$ называется целой. Если функция f не имеет в области $D \subset \overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \infty$ других точек неголоморфности, кроме устранимых особых точек и полюсов, то говорят, что функция f мероморфна на D.*

Задача 2.3. *Функция $f(z)$ — мероморфна на всей сфере $\overline{\mathbb{C}}$, если и только если она рациональна, то есть $f(z) = \frac{a_0 z^n + \ldots + a_n}{b_0 z^m + \ldots + b_m}$.*

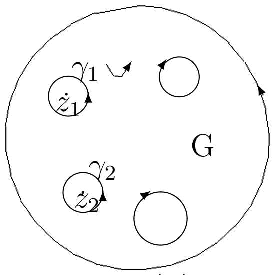
Это важное утверждение демонстрирует фундаментальную взаимосвязь между аналитическими свойствами функции и ее агебраичностью.

2.3. **Вычеты и Интегралы в смысле главного значения.** Далее, если не оговорено противное, все контуры считаются ориентированными против часовой стрелки.

Определение 2.6. *Пусть функция $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ определена в области U и $\gamma = \{z \in \mathbb{C} | |z - z_0| = r\} \subset U$. Тогда величина $\mathsf{res}_{z_0} f = c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z)\, dz$ называется вычетом функции f.*

Теорема 2.7. *Пусть функция $f(z)$ голоморфна в области D всюду кроме изолированных особых точек, $G \subset D$ — компактное подмножество и его граница ∂G не содержит особых точек. Тогда $\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} f(z)\, dz = \sum_j \mathsf{res}_{z_j} f$, где сумма берется по всем особым точкам, принадлежащим G.*

Proof. Пусть $\gamma_j \subset G$ — попарно непересекающиеся замкнутые контуры, окружающие точки z_j (см.рисунок)



Тогда согласно теореме 1.6 и примеру 1.1

$$\int_{\partial G} f(z)\, dz = \sum_j \int_{\gamma_j} f(z)\, dz = \sum_j \mathsf{res}_{z_j} f.$$

□

Определение 2.7. *Пусть функция $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$ голоморфна в области $U = \{z \in \mathbb{C} | |z| > R\}$ и контур $\gamma = \{z \in \mathbb{C} | |z - z_0| = r\} \subset U$ ориентирован против часовой стрелки. Тогда величина $\mathsf{res}_\infty f = -c_{-1} = -\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z)\, dz$ называется вычетом функции $f(z)$ в ∞.*

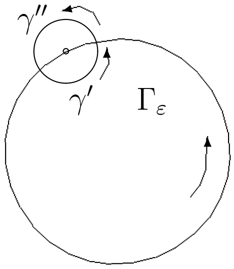
Теорема 2.8. *Пусть функция $f(z)$ голоморфна всюду на сфере $\overline{\mathbb{C}}$, за исключением конечного числа точек $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C} \cup \infty$. Тогда $\sum_{i=1}^n \mathsf{res}_{z_i} f = 0$.*

Как вы уже заметили, все определения и теоремы, для функций на $D \subset \mathbb{C}$ естественно распространяются на области, содержащие ∞. С этой точки зрения знак "-" в предыдущем определении объясняется что рассматриваемый нами контур обходит ∞ против часовой стрелки.

Определение 2.8. *Пусть функция* $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ *определена в области* $U \setminus z_0$ *и* z_0 *— внутренняя точка компактной кривой* Γ. *Положим* $G_\varepsilon = \{z \in G \mid |z - z_0| \le \varepsilon\}$ *и* $\Gamma_\varepsilon = \Gamma \setminus G_\varepsilon$. *Тогда предел* $v.p. \int_\Gamma f(z)\,dz = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} f(z)\,dz$ *называется интегралом по* Γ *в смысле главного значения.*

Теорема 2.9. *Пусть функция* $\mu(z)$ *голоморфна в проколотой окрестности* z_0, $|\mu(z) - \mu(z_0)| \le const|z - z_0|$ *(условие Липшица) и* $z_0 \in \Gamma$, *где* Γ *— гладкая кривая. Тогда* $v.p. \displaystyle\int_\Gamma \frac{\mu(z)}{z-z_0}dz = \pi i \mu(z_0) + \int_\Gamma \frac{\mu(z)-\mu(z_0)}{z-z_0}dz.$

Proof. Можно считать, что кривая Γ замкнута и лежит в проколотой окрестности точки z_0, в которой функция $\mu(z)$ голоморфна. Положим $\gamma_\varepsilon = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| = \varepsilon\} = \gamma' \cup \gamma''$, где $\gamma' \cap \gamma'' \subset \Gamma$ (см.рисунок).



Тогда

$$\int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\mu(z)}{z-z_0}dz = \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\mu(z)-\mu(z_0)}{z-z_0}dz + \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\mu(z_0)}{z-z_0}dz = \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\mu(z)-\mu(z_0)}{z-z_0}dz + \int_{\gamma'} \frac{\mu(z_0)}{z-z_0}dz$$

Поэтому $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\mu(z)}{z-z_0} = \int_{\Gamma} \frac{\mu(z)-\mu(z_0)}{z-z_0}dz + \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2}\int_{\gamma_\varepsilon} \frac{\mu(z_0)}{z-z_0}dz = \int_{\Gamma} \frac{\mu(z)-\mu(z_0)}{z-z_0}dz + \pi i \mu(z_0).$

□

2.4. **Принцип аргумента.**

Определение 2.9. *В случае, если* f *имеет в* z_0 *нуль(или полюс) порядка* n, *будем говорить, что* f *имеет в* z_0 n *нулей (соответственно,* n *полюсов).*

Теорема 2.10. *Пусть функция* f *мероморфна в области* D *и* $\Gamma \subset D$ *— замкнутый контур, ограничивающий множество* G. *Пусть* N *— число нулей и* P *— число полюсов функции* f *в множестве* G, *причем граница* $\partial G = \Gamma$ *не содержит нулей и полюсов функции* f. *Тогда* $N - P = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz$.

Proof. Пусть z_0 — нуль порядка n или полюс порядка $-n$. Тогда

$$f(z) = (z-z_0)^n \phi(z), \quad \text{где} \quad \phi(z_0) \ne 0,$$

$$f'(z) = (z-z_0)^{n-1}\left((z-z_0)\phi'(z) + n\phi(z)\right)$$

и

$$\frac{f'}{f} = \frac{1}{z-z_0}\left(n + (z-z_0)\frac{\phi'(z)}{\phi(z)}\right).$$

Таким образом, $\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{z_0}}\frac{f'}{f}dz = n$, где $\gamma_{z_0} \subset G$ — контур, отделяющий точку z_0 от других нулей и полюсов. По теореме Коши интеграл $\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz$ равен сумме всех интегралов вида $\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{z_0}}\frac{f'}{f}dz$, отвечающих нулям и полюсам z_0 функции f. Следовательно, $\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = N - P$. $\square$

Напомним, что число $\phi \in [0, 2\pi)$ называется *аргументом* числа $u = re^{i\phi}$ и обозначается $\arg u$. Пусть функция $f(u)$ определена на контуре Γ и $f|_\Gamma \neq 0$. Если переменная u обходит контур Γ один раз против часовой стрелки, то число $e^{i \arg f(u)}$ обходит контур $S = \{z \in \mathbb{C} | |z| = 1\}$ целое число раз, обозначаемое $\frac{1}{2\pi}\Delta_\Gamma \arg f$.

Теорема 2.11. *[Принцип аргумента] В предположениях теоремы 2.10* $N - P = \frac{1}{2\pi}\Delta_\Gamma \arg f(z)$.

Proof. Продеформируем Γ в малые контуры γ_i вокруг нулей и полюсов $f(z)$, и отрезки, соединяющие их с Γ (см. рисунок к теореме 1.6). Отрезки проходятся дважды в противоположных направлениях и вклада в величину $\frac{1}{2\pi}\Delta_\Gamma \arg f(z)$ не дают. Следовательно, величина $\frac{1}{2\pi}\Delta_\Gamma \arg f(z)$ равна сумме величин $\frac{1}{2\pi}\Delta_{\gamma_i} \arg f(z)$ по всем контурам γ_i. Если γ — маленький контур, окружающий точку z_0, где $f(z) = (z - z_0)^n \phi(z)$ и $\phi(z_0) \neq 0$, то $\frac{1}{2\pi}\Delta_\gamma \arg f(z) = \frac{1}{2\pi}\Delta_\gamma \arg(z - z_0)^n = n$. $\square$

Теорема 2.12 (Руше)**.** *Пусть функции f и g голоморфны в области D и замкнутый контур $\Gamma \subset D$, ограничивающий множество G, не содержит нулей f. Пусть $|f(z)| > |g(z)|$ на Γ. Тогда функции f и $f + g$ имеют в G одинаковое число нулей.*

Proof. Положим $F_\lambda = f + \lambda g$. Тогда $F_\lambda|_{\partial G} \neq 0$ при $0 \leq \lambda \leq 1$. Следовательно, функция $\psi(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\Delta_\Gamma \arg F_\lambda(z)$ существует, непрерывна, и, значит, постоянна. В частности,

$$\frac{1}{2\pi}\Delta_\Gamma \arg f(z) = \frac{1}{2\pi}\Delta_\Gamma \arg F_0(z) = \frac{1}{2\pi}\Delta_\Gamma \arg F_1(z) = \frac{1}{2\pi}\Delta_\Gamma \arg(f(z) + g(z)).$$

Принцип аргумента завершает доказательство теоремы $\square$

Следствие 2.1. *[Основная Теорема Алгебры] Многочлен степени n имеет на $\mathbb{C}$ ровно n корней.*

Proof. Произвольный многочлен имеет вид

$$P_n = a_n z^n + \cdots + a_0 = f(z) + g(z),$$

где $f(z) = a_n z^n$, $g(z) = a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0$. Применим теперь теорему Руше к паре f, g и контуру Γ_R $\{z \in \mathbb{C} | |z| = R\}$ при достаточно большом R. $\square$

2.5. **Топологические свойства мероморфных функций.**

Лемма 2.1. *Пусть $f(z) = w_0 + (z - z_0)^n \phi(z)$, где $1 \leq n$, функция ϕ голоморфна в окрестности точки z_0 и $\phi(z_0) \neq 0$. Тогда существуют области $z_0 \in U$ и $w_0 \in W \subset f(U)$ такие что для любой точки $w \in W$ функция $f(z) - w$ имеет ровно n различных нулей на $U \setminus z_0$.*

Proof. Выберем r таким образом, чтобы на множестве $D = \{z \in \mathbb{C} | |z - z_0| \leq r\}$ функция $\phi(z)$ не обращалась в ноль и f' не имела нулей на $U \setminus z_0$. Положим $U = D \setminus \partial D$, $\mu = \min\limits_{z \in \partial D} |f(z) - w_0| > 0$ и $W = \{w \in \mathbb{C} | |w - w_0| < \mu\}$. Если $w \in W \setminus w_0$, то $f(z) - w = (f(z) - w_0) + (w_0 - w)$, где на контуре ∂D: $|f(z) - w_0| \geq \mu$, $|w_0 - w| < \mu$.

Функция $f(z)-w_0$ имеет в области U ровно n нулей. Согласно теореме Руше отсюда следует, что функция $(f(z)-w)$ также имеет в области U ровно n нулей. При $w \neq w_0$ все они различны, поскольку f' не имеет нулей на $U \setminus z_0$ □

Теорема 2.13. *[Сохранение области] Если функция f голоморфна в области D и $f \neq const$, то $f(D)$ — тоже область.*

Proof. Согласно лемме 2.1, для всякой точки $z_0 \in D$ существует окрестность W точки $w_0 = f(z_0)$, такая что $W \subset f(D)$. □

Определение 2.10. *Функция f называется однолистной, если $f(z_1) \neq f(z_2)$ при $z_1 \neq z_2$.*

Теорема 2.14. *[Критерий однолистности] Голоморфная функция f однолистна в некоторой окрестности точки z_0 тогда и только тогда, когда $f'(z_0) \neq 0$.*

Proof. Согласно лемме 2.1, обратимость f в окрестности точки z_0 эквивалентна равенству $f(z) = w_0 + (z - z_0)\phi(z)$, где $\phi(z_0) \neq 0$, что эквивалентно условию $f'(z_0) \neq 0$. □

Задача 2.4. *Доказать, что функция g, обратная к однолистной функции f, тоже однолистна и $g'(w_0) = \frac{1}{f'(z_0)}$.*

Теорема 2.15 (Принцип максимума модуля)**.** *Если непостоянная функция f голоморфна в области D и непрерывна на замыкании $\overline{D} \subset \mathbb{C} \cup \infty$, то $\max\limits_{z\in\overline{D}} |f(z)| = \max\limits_{z\in\partial\overline{D}} |f(z)|$.*

Proof. Пусть функция $|f|$ достигает максимума в точке $z_0 \in D$ и $w_0 = f(z_0)$. Тогда согласно теореме 2.13 $W = \{z \in \mathbb{C} | |w-w_0| < r\} \subset f(D)$ для некоторого r. Множество W содержит точки w такие что $|w| > |w_0|$. Следовательно, существует точка $z \in D$ такая, что $w = f(z) \in W$ и $|f(z)| = |w| > |w_0|$. □

Теорема 2.16 (Лемма Шварца)**.** *Пусть функция $f(z)$ голоморфна в области $U = \{z \in \mathbb{C} | |z| < 1\}$, $f(0) = 0$ и $|f(z)| \leq 1$. Тогда $|f(z)| \leq |z|$ для всех точек $z \in U$, причем если $|f(z_0)| = |z_0|$ при $z_0 \neq 0$, то $f(z) = \alpha z$, где $|\alpha| = 1$.*

Proof. Функция $\phi(z) = \frac{f(z)}{z}$ голоморфна на каждом круге $U_r = \{z \in \mathbb{C} | |z| \leq r\}$, где $r < 1$. Согласно теореме 2.15, $\max\limits_{z\in U_r} |\phi(z)| \leq \max\limits_{z\in\partial U_r} |\frac{f(z)}{z}| \leq \frac{1}{r}$. Таким образом, $|\phi(z)| \leq 1$. то есть $|f(z)| \leq |z|$. Если $|f(z_0)| = |z_0|$ и $z_0 \in U_r$, то $|\phi(z_0)| = 1$, и согласно теореме 2.15, $\phi(z) = const$ на U. То есть $f(z) = \alpha z$, где $|\alpha| = 1$. □

3. Теорема Римана.

3.1. Непрерывные функционалы на компактных семействах функций.

Определение 3.1. *Семейство функций $\mathfrak{F}$ называется равномерно ограниченным внутри области D, если для любого компакта $K \subset D$ существует константа $M = M(K)$, такая что $|f(z)| \leq M$ для всех $f \in \mathfrak{F}, z \in K$.*

Задача 3.1. *Если семейство голоморфных функций $\mathfrak{F}$ равномерно ограничено внутри области D, то семейство функций $\{f'\}$ также равномерно ограничено внутри D. (Указание: Воспользоваться формулой Коши).*

Определение 3.2. *Семейство функций $\mathfrak{F}$ называется равностепенно непрерывным внутри области D, если для любого $\varepsilon > 0$ и любого компакта $K \subset D$ существует $\delta = \delta(\varepsilon, K)$, такое что для любых $(z_1, z_2 \in K||z_1 - z_2| < \delta)$ и для всех $f \in \mathfrak{F}$ выполняется условие $|f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon$.*

Задача 3.2. *Если семейство функций $\mathfrak{F}$, голоморфных внутри области D, равномерно ограничено внутри области D, то оно равностепенно непрерывно внутри D. (Указание: Воспользоваться задачей 3.1).*

Определение 3.3. *Последовательность функций на D называется фундаментальной, если она равномерно сходится на каждом компакте $K \subset D$.*

Теорема 3.1. *[Монтель] Пусть $\mathfrak{F}$ — семейство голоморфных функций равномерно ограниченных внутри области D. Тогда из каждой последовательности $\{f_n\} \subset \mathfrak{F}$ можно выбрать фундаментальную подпоследовательность.*

Proof. Пусть $\mathbb{Q} = \{\widetilde{z}_1, \widetilde{z}_2, \dots\}$ — множество всех рациональных точек в D. Выберем из последовательности f_n подпоследовательность f_n^1, такую что $f_n^1(\widetilde{z}_1)$ сходится. Выберем из последовательности f_n^1 подпоследовательность f_n^2, такую что $f_n^2(\widetilde{z}_2)$ сходится и.т.д.... Положим $h_n = f_n^n$. Тогда $h_n(\widetilde{z}_p)$ сходится при любом p. Докажем фундаментальность последовательности h_n. Пусть $K \subset D$ — компакт. Тогда, согласно задаче 3.2, существует покрытие множества K квадратиками, такое что, если z' и z'' принадлежат одному квадратику, то $|f(z') - f(z'')| < \frac{\varepsilon}{3}$. Ввиду компактности K можно считать, что таких квадратиков конечное число. Выберем в каждом из них по одной точке из множества $\mathbb{Q}$. Получим точки $z_1, \dots, z_p$. Ввиду сходимости последовательностей $h_n(z_i)$, для всех i и согласно критерию Коши существует N, такое что $|h_m(z_i) - h_n(z_i)| < \frac{\varepsilon}{3}$ при $n, m > N$ и всех i. Таким образом, если z_k лежит в том же квадратике, что и z, то $|h_m(z) - h_n(z)| \leq |h_m(z) - h_m(z_k)| + |h_m(z_k) - h_n(z_k)| + |h_n(z_k) - h_n(z)| < \varepsilon$. Следовательно, согласно критерию Коши последовательность функции h_n равномерно сходится на K. □

Определение 3.4. *Семейство функций $\mathfrak{F}$ на D называется компактным, если из любой последовательности функций $\{f_n\} \subset \mathfrak{F}$ можно выбрать фундаментальную подпоследовательность, сходящуюся к функции из $\mathfrak{F}$.*

Определение 3.5. *Отображение $J : \mathfrak{F} \to \mathbb{C}$, определенное на семействе функций $\mathfrak{F}$ называется функционалом. Функционал называется непрерывным, если для любой фундаментальной последовательности $\{f_n\} \subset \mathfrak{F}$, сходящейся к $f \in \mathfrak{F}$ имеет место равенство $\lim_{n\to\infty} J(f_n) = J(f)$.*

Задача 3.3. *Пусть $\mathfrak{F}$ — семейство функций, голоморфных в области $D \ni a$. Доказать, что $J(f) \equiv f^{(p)}(a)$ — непрерывный функционал.*

Задача 3.4. *Доказать, что непрерывный функционал на компактном семействе ограничен.*

Теорема 3.2. *Пусть J - непрерывный функционал на компактном семействе $\mathfrak{F}$ функций на D. Тогда существует функция $f_0 \in \mathfrak{F}$, такая что $|J(f_0)| \geq |J(f)|$ для всех функций $f \in \mathfrak{F}$.*

Proof. Пусть $A = \sup_{f\in\mathfrak{F}} |J(f)|$. Тогда существует последовательность $\{f_n\} \subset \mathfrak{F}$ такая, что $\lim_{n\to\infty} |J(f_n)| = A$. Ввиду компактности семейства $\mathfrak{F}$ существует фундаментальная подпоследовательность функций $\{h_m\} \subset \{f_n\}$, сходящаяся к $f_0 \in \mathfrak{F}$. Ввиду непрерывности функционала $A = \lim_{n\to\infty} |J(f_n)| = \lim_{m\to\infty} |J(h_m)| = |J(f_0)|$ $\square$

3.2. **Теорема Гурвица и однолистные функции.**

Теорема 3.3. *[Гурвиц] Пусть последовательность $\{f_n\}$ голоморфных функций в области D фундаментальна, $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ и $f(z_0) = 0$. Тогда для любого $r > 0$ существует N такое, что для любого $n > N$ функция f_n имеет нуль в области $\{z \in D||z - z_0| < r\}$.*

Proof. Можно считать, что $f \neq const$. Согласно теореме Вейерштрасса (1.15) $f(z) = (z - z_0)^p(a + \phi(z))$, где $a \neq 0$, функция $\phi(z)$ голоморфна и $\phi(z_0) = 0$. Поэтому существует $\rho > 0$ такое, что $|f(z)| > 0$ на множестве $Q = \{0 < |z-z_0| \le \rho\}$. Положим $\mu = \min\limits_{\partial Q} |f(z)| > 0$. Поскольку последовательность $\{f_n\}$ равномерно сходится на границе ∂Q, то существует N такое, что для любых $n > N$ и $z \in \partial Q$ выполнено неравенство $|f_n(z)-f(z)| < \mu$. Следовательно, согласно теореме Руше(2.12) функция $f_n = f + (f_n - f)$ имеет в области $Q \setminus \partial Q$ нуль. $\square$

Теорема 3.4. *Пусть последовательность однолистных на области D функций $\{f_n\}$ фундаментальна сходится к непостоянной функции f. Тогда функция f однолистна.*

Proof. Согласно теореме Вейерштрасса f — голоморфная функция. Предположим, что $z_1 \neq z_2$ и $f(z_1) = f(z_2)$. Положим $Q = \{z \in D||z - z_1| < |z_2 - z_1|\}$. Пусть $h(z) = f(z) - f(z_2)$ — предел последовательности функций $h_n(z) = f_n(z) - f_n(z_2)$. Тогда $h(z_1) = 0$. Согласно теореме 3.3 существуют N и $z_0 \in Q$ такие что $h_N(z_0) = 0$. Следовательно, $f_N(z_0) = f_N(z_2)$, что противоречит однолистности f_N. $\square$

Теорема 3.5. *Пусть S — семейство всех голоморфных однолистных функций на области D, таких что $|f| \le 1$. Предположим, что семейство S содержит непостоянную функцию. Тогда существуют функция$f_0 \in S$ и точка $a \in D$ такие что $0 < |f_0(a)|$ и $|f'(a)| \le |f_0'(a)|$ для всех $f \in S$.*

Proof. По условию существуют функция $f_1 \in S$ и точка $a \in D$ такие что $|f_1'(a)| > 0$. Положим $S_1 = \{f \in S||f'(a)| \ge |f_1'(a)|\}$. Согласно теореме Монтеля(3.1), из каждой последовательности $\{f_n\} \subset S_1$ можно выбрать фундаментальную подпоследовательность. По теореме Вейерштрасса её предел g — аналитическая функция, такая что $|g'(a)| \ge |f_1'(a)| > 0$, то есть $g \neq const$. Согласно теореме 3.4, отсюда следует, что g — однолистная функция, то есть $g \in S_1$. Таким образом, S_1 – компактое семейство функций. Согласно задаче 3.3, $y(a) = |f'(a)|$ — непрерывный функционал на S_1. Согласно теореме 3.2, он достигает максимума на некоторой функции $f_0 \in S_1$. Следовательно, $|f_0'(a)| \ge |f'(a)|$ для всех $f \in S$. $\square$

3.3. **Аналитическое продолжение.**

Определение 3.6. *Каноническим элементом называется пара (U_a, f_a), где $f_a(z) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i(z - a)^i$ и U_a — круг с центром в a, в котором ряд f_a сходится. Канонические элементы (U_a, f_a) и $(\tilde{U}_a, \tilde{f}_a)$ считаются эквивалентными, если*

$$f_a|_{U_a\cap\tilde{U}_a} = \tilde{f}_a|_{U_a\cap\tilde{U}_a}.$$

Определение 3.7. *Пусть* $\gamma \subset \mathbb{C}$ *— путь, соединяющий точки* a *и* b. *Говорят, что канонический элемент* (U_b, f_b) *является аналитическим продолжением канонического элемента* (U_a, f_a) *вдоль пути* γ, *если существуют точки* $a = a_1, a_2, \ldots, a_k = b \in \gamma$ *и канонические элементы* (U_{a_i}, f_{a_i}), *где* $(U_{a_1}, f_{a_1}) = (U_a, f_a)$ *и* $(U_{a_k}, f_{a_k}) = (U_b, f_b)$, *такие что* $\gamma \subset \bigcup\limits_{i=1}^{k} U_{a_i}$, $U_{a_i} \cap U_{a_{i+1}} \neq \emptyset$ *и* $f_{a_i}|_{U_{a_i} \cap U_{a_j}} = f_{a_j}|_{U_{a_i} \cap U_{a_j}}$.

Задача 3.5. *Доказать, что все аналитические продолжения канонического элемента* (U_a, f_a) *вдоль пути* γ *эквивалентны.*

Теорема 3.6. *Пусть* γ_0 *и* γ_1 *— гомотопные пути с одинаковыми концами* a *и* b, *и* $\gamma_t (t \in [0,1])$ *— гомотопия между ними. Пусть* (U_a, f_a) *— канонический элемент, имеющий аналитическое продолжение вдоль каждого пути* γ_t. *Тогда аналитические продолжения канонического элемента* (U_a, f_a) *вдоль путей* γ_0 *и* γ_1 *эквивалентны.*

Proof. Пусть $(U_{a_i^t}, f_{a_i^t})$ — канонические элементы, отвечающие пути γ_t и точкам $a_1, ..., a_{k_t}$ о которых идет речь в последнем определении. Пусть T — множество таких $t \in [0,1]$, что аналитические продолжения вдоль путей γ_0 и γ_t эквивалентны. Множество T — открыто, поскольку при t' достаточно близких к t: $\gamma_{t'} \subset \bigcup\limits_{i=1}^{k} U_{a_i^t}$ и следовательно аналитическое продолжение вдоль $\gamma_{t'}$ можно построить с помощью окрестностей $U'_{a_i^t} \subset \bigcup\limits_{i=1}^{k} U_{a_i^t}$. По очевидным причинам T — замкнуто. Значит $T = [0,1]$. □

Задача 3.6. *Показать, что при нарушении условия теоремы 3.6 о существовании аналитического продолжения вдоль каждого пути* γ_t *аналитические продолжения вдоль путей* γ_0 *и* γ_1 *могут не быть эквивалентными.*

3.4. **Теорема Римана.**

Задача 3.7. *Если* $|a| < 1, |b| < 1$, *то* $\left| \dfrac{a-b}{1-\overline{a}b} \right| < 1$.

Теорема 3.7 (Риман). *Пусть* $D \subset \overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \infty$ *— односвязная область, дополнение к которой содержит более одной точки. Тогда существует голоморфная однолистная функция* $f : D \to \Lambda = \{z \in \mathbb{C} | |z| < 1\}$, *такая что* $f(D) = \Lambda$.

Proof. Пусть $\alpha \neq \beta \in \mathbb{C} \setminus D$. Функция $f = \sqrt{\frac{z-\alpha}{z-\beta}}$ принимает в $a \in D$ два значения и порождает два канонических элемента (U_a^1, f_a^1), (U_a^2, f_a^2), где $f_a^1 = -f_a^2$ на $U_a^1 \cap U_a^2$. Соединим произвольную точку $b \in D$ с точкой a путем $\gamma \subset D$. Пусть (U_b^i, f_b^i) — аналитическое продолжение (U_a^i, f_a^i) вдоль γ. Согласно теореме 3.6, канонический элемент (U_b^i, f_b^i) не зависит от γ. Таким образом, существуют аналитические функции $f^i : D \to \mathbb{C}$, такие что $f_b^i = f^i|_{U_b}$ для всех $b \in D$, причем $f^2 = -f^1$. Положим $D_i = f^i(D)$. Если $f^i(z_1) = \pm f^i(z_2)$, то $\frac{z_1-\alpha}{z_1-\beta} = \frac{z_2-\alpha}{z_2-\beta}$, откуда $z_1 = z_2$. Таким образом, функции f^i однолистны и $D_1 \cap D_2 = \emptyset$. Согласно теореме сохранения области(2.13) область D_2 содержит круг $W = \{w \in \mathbb{C} | |w - w_0| < \rho\}$, причем $|f^1(z) - w_0| \geq \rho$, ввиду $W \cap D_1 = \emptyset$. Положим $\tilde{f}(z) = \frac{\rho}{f^1(z) - w_0}$. Функция $\tilde{f} \neq const$ голоморфна, однолистна и $|\tilde{f}(z)| \leq 1$.

Рассмотрим множество S всех однолистных функций $g : D \to \Lambda$. Оно содержит непостоянную функцию $\tilde{f}$. Согласно теореме 3.5 существуют точка $a \in D$ и функция $f_0 \in S$, такие что $|g'(a)| \leq |f_0'(a)| > 0$ для всех функций $g \in S$.

Докажем, что $f_0(D) = \Lambda$. Положим $h(z) = \dfrac{f_0(z) - f_0(a)}{1 - \overline{f_0(a)} f_0(z)}$. Тогда функция $h(z)$ — однолистна и, согласно задаче 3.7 $|h(z)| \leq 1$. Следовательно, $h \in S$, откуда $|f_0'(a)| \geq |h'(a)| = \frac{1}{1-|f_0(a)|^2}|f_0'(a)|$ и $f_0(a) = 0$. Докажем, что любое $b \in \Lambda \setminus 0$ принадлежит $f_0(D)$. Пусть $b \notin f_0(D)$. Рассмотрим $\psi(z) = \sqrt{\dfrac{f_0(z) - b}{1 - \bar{b} f_0(z)}}$. Продолжая аналитический элемент (U_a, ψ_a^1) функции ψ, построим аналитическую функцию ψ^1 на D. Рассмотрим функцию $h(z) = \dfrac{\psi^1(z) - \psi^1(a)}{1 - \overline{\psi^1(a)}\psi^1(z)}$. Она однолистна и, согласно задаче 3.7, $|h(z)| \leq 1$, то есть $h \in S$. Но тогда $|f_0'(a)| \geq |h'(a)| = \frac{1+|b|}{2\sqrt{|b|}}|f_0'(a)| > |f_0'(a)|$. Полученное противоречие доказывает, что $b \in f_0(D)$. □

3.5. **Автоморфизмы односвязных областей.**

Определение 3.8. *Взаимно однозначное голоморфное отображение $\alpha : D_1 \to D_2$ называется (би) голоморфным изоморфизмом. В таком случае говорят, что D_1 и D_2 биголоморфно изоморфны.*

Задача 3.8. *Доказать, что в этом случае и $\alpha^{-1} : D_2 \to D_1$ тоже голоморфный изоморфизм.*

Определение 3.9. *Голоморфный изоморфизм $\alpha : D \to D$ называется автоморфизмом.*

Задача 3.9. *Доказать, что суперпозиция отображений задает структуру группы $\mathsf{Aut}(D)$ на множестве голоморфных автоморфизмов области D.*

Согласно теореме Римана, *любая односвязная область $U \subset \overline{\mathbb{C}}$ биголоморфно изоморфна $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \infty$, $\mathbb{C}$ или $\Lambda = \{z \in \mathbb{C} | |z| < 1\}$.*

Задача 3.10. *Доказать, что $\{z \mapsto e^{i\alpha}\dfrac{z-a}{1-\bar{a}z} | |a| < 1, \alpha \in \mathbb{R}\} \subset \mathsf{Aut}(\Lambda)$.*

Теорема 3.8. $\mathsf{Aut}(\overline{\mathbb{C}}) = \{z \mapsto \dfrac{az+b}{cz+d} | a, b, c, d \in \mathbb{C}, ad - bc \neq 0\}$,

$$\mathsf{Aut}(\mathbb{C}) = \{z \mapsto az + b | a, b \in \mathbb{C}, a \neq 0\}$$

$$\mathsf{Aut}(\Lambda) = \{z \mapsto e^{i\alpha}\frac{z-a}{1-\overline{az}} | |a| < 1, \alpha \in \mathbb{R}\}$$

Proof. Из определений следует, что $\mathsf{Aut}(\mathbb{C}) = \{f \in \mathsf{Aut}(\overline{\mathbb{C}}) | f(\infty) = \infty\}$. Пусть $f \in \mathsf{Aut}(\overline{\mathbb{C}}) \setminus \mathsf{Aut}(\mathbb{C})$. Тогда $f(a) = \infty$ для $a \in \mathbb{C}$. Согласно теоремам 2.5 и 2.7, $f(z) = \frac{A}{z-a} + \phi(z)$, где функция ϕ голоморфна на $\mathbb{C}$. Кроме того, $\lim_{z\to\infty} \phi(z) = \lim_{z\to\infty} f(z) = f(\infty) \in \mathbb{C}$ и по теореме Лиувилля(2.4) $\phi(z) = const$. Таким образом, $\mathsf{Aut}(\overline{\mathbb{C}}) \setminus \mathsf{Aut}(\mathbb{C}) = \{z \mapsto \frac{A}{z-a} + B | A, B, a \in \mathbb{C}, A \neq 0\}$. Если $f \in \mathsf{Aut}(\mathbb{C})$, то $f(z^{-1}) \in \mathsf{Aut}(\overline{\mathbb{C}}) \setminus \mathsf{Aut}(\mathbb{C})$ и, как уже доказано, $f(z^{-1}) = \frac{A}{z} + B$. Отсюда $f(z) = Az + B$, где $A \neq 0$.

Пусть $f \in \mathsf{Aut}(\Lambda)$ и $f(a) = 0$. Положим $\phi(z) = \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$ и $g(z) = f(\phi^{-1}(z))$. Тогда $g(0) = 0$ и, согласно задаче 3.10, $g \in \mathsf{Aut}(\Lambda)$. Применяя лемму Шварца(теорема 2.16) к функциям g и g^{-1}, находим, что $|g(z)| = |z|$. Отсюда по лемме Шварца $g(z) = e^{i\alpha}z$. $\square$

Области $\mathbb{C}$ и $\Lambda = \{z \in \mathbb{C} | |z| < 1\}$ гомеоморфны. Однако не биголоморфно изоморфны, поскольку по предыдущей теореме $\mathsf{Aut}(\mathbb{C})$ и $\mathsf{Aut}(\Lambda)$ не изоморфны.

Задача 3.11. *Доказать, что* $\mathsf{Aut}(\{z \in \mathbb{C} | \mathtt{Im}(z) > 0\}) = \{z \mapsto \frac{az+b}{cz+d} | a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad-bc > 0\}$

3.6. **Соответствие границ.** Обсудим вопрос о продолжении биголоморфного отображения на границу. Приведем без доказательства следующую важную теорему" назывемую принципом соответствия границ.

Теорема 3.9. *(Каратеодори) Пусть области $D_1, D_2 \subset \overline{\mathbb{C}}$ ограничены жордановыми кривыми. Тогда биголоморфное отображение $f : D_1 \to D_2$ продолжается до гомеоморфизма замыканий $\bar{f} : \bar{D_1} \to \bar{D_2}$*

Задача 3.12. *Доказать, что если граница области содержит аналитическую дугу γ, то биголоморфное отображение этой области на единичный круг можно аналитически продолжить через γ.*

Более простая обратная теорема верна в следующей форме

Теорема 3.10. *Пусть односвязные области $D_1, D_2 \subset \overline{\mathbb{C}}$ ограниченные жордановыми кривыми причем $\bar{D_2} \subset \mathbb{C}$. Пусть отображение $\bar{f} : \bar{D_1} \to \bar{D_2}$ непрерывно, отображение $\bar{f}|_{\partial \bar{D_1}} : \partial \bar{D_1} \to \partial \bar{D_2}$ взаимно-однозначно, а отображение $\bar{f}|_{D_1} : D_1 \to D_2$ голоморфно. Тогда отображение $\bar{f}|_{D_1} : D_1 \to D_2$ биголоморфно.*

Proof. Пусть $w_0 \in D_2$. Тогда $w_0 \cap \bar{f}(\gamma) = \emptyset$ и, следовательно $\frac{1}{2\pi}\Delta_\gamma \arg f(z) - w_0 = 1$. Ввиду непрерывности и целочисленности левой части равенства, $\frac{1}{2\pi}\Delta_{\bar{\gamma}} \arg f(z) - w_0 = 1$ для близкого к γ контура $\bar{\gamma}$. Согласно принципу аргумента (теорема 2.11) отсюда следует, что $f(z) = w_0$ ровно в одной точке на D. $\square$

Задача 3.13. *Показать, что теорема 3.10 не верна, если $\bar{D_2} \supset \infty$.*

4. Введение в римановы поверхности.

4.1. Римановы поверхности. Униформизация.

Определение 4.1. *Риманова поверхность — это одномерное комплексное многообразие, то есть*

(1) *Поверхность M (двухмерное топологическое многобразие)*
(2) *Голоморфный атлас карт, то есть набор $\{(U_\alpha, f_\alpha)\}$ карт (U_α, f_α), где множества $U_\alpha \subset M$ открыты и односвязны, $\bigcup\limits_\alpha U_\alpha = M$, функции $f_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{C}$ однолистны (т.е. $f_\alpha(x) \neq f_\alpha(y)$ при $x \neq y$) и функции $f_\beta f_\alpha^{-1}|_{f(U_\alpha) \cap f(U_\beta)}$ голоморфны.*

Атлас называют также комплексной структурой.

Пример. Область $M \subset \overline{\mathbb{C}}$ является римановой поверхностью.

Определение 4.2. *Римановы поверхности* $(M, \{(U^1_\alpha, f^1_\alpha)\})$ *и* $(M, \{(U^2_\alpha, f^2_\alpha)\})$ *считаются совпадающими, если объединение атласов* $\{(U^1_\alpha, f^1_\alpha),\ (U^2_\beta, f^2_\beta)\}$ *— тоже атлас.*

Определение 4.3. *Римановы поверхности* $(M^1, \{(U^1_\alpha, f^1_\alpha)\})$ *и* $(M^2, \{(U^2_\alpha, f^2_\alpha)\})$ *считаются биголоморфно эквивалентными (изоморфными), если существует гомеоморфизм* $\phi : M^1 \to M^2$*, такой, что римановы поверхности* $(M^1, \{(U^1_\alpha, f^1_\alpha)\})$ *и* $(M^1, \{(\phi^{-1}U^2_\alpha, \phi f^2_\alpha)\})$ *совпадают.*

Задача 4.1. *Докажите, что плоскость* $\mathbb{C}$ *не биголоморфно эквивалентна диску* Λ.

Теорема Униформизации. (Пуанкаре и Кебе). *Всякая односвязная риманова поверхность биголоморфно эквивалентна* $\overline{\mathbb{C}}$, $\mathbb{C}$ *или* $\Lambda = \{z \in \mathbb{C} | |z| < 1\}$. (Для подмножеств сферы Римана $\mathbb{C}$ это следует из теоремы Римана).

Теорема 4.1. *Всякая риманова поверхность биголоморфно эквивалентна* $\overline{\mathbb{C}}, \mathbb{C}, \mathbb{C} \setminus 0$, *тору* $\mathbb{C}/\Gamma'$, *где* Γ' *— дискретная решетка, или* Λ/Γ, *где* $\Gamma \subset \mathsf{Aut}(\Lambda)$ *— дискретная группа, действующая без неподвижных точек.*

Proof. Из теоремы униформизации и стандартных фактов топологии следует, что всякая риманова поверхность биголоморфно эквивалентна W/Γ, где $W \in \{\overline{\mathbb{C}}, \mathbb{C}, \Lambda\}$ и $\Gamma \subset \mathsf{Aut}(W)$ — дискретная группа, действующая без неподвижных точек. Каждый $A \in \mathsf{Aut}(\overline{\mathbb{C}})$ имеет неподвижные точки. Среди $A \in \mathsf{Aut}(\mathbb{C})$ неподвижные точки отсутствуют лишь у параллельных переносов. Дискретная группа параллельных переносов порождается одной или двумя образующими. Таким образом, $\mathbb{C}/\Gamma'$ или цилиндр $\mathbb{C} \setminus 0 = f(\mathbb{C})$, где $f(z) = e^{\frac{2\pi i z}{b}}$, или тор. $\square$

Вместо Λ можно рассматривать биголоморфно эквивалентную ей полуплоскость $U = \{z \in \mathbb{C} | \mathbf{Im} z > 0\}$.

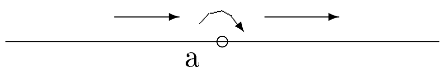
4.2. **Фуксовы группы.**

Задача 4.2. *Доказать, что группа* $\mathsf{Aut}(U)$ *совпадает с группой изометрий метрики* $ds = \dfrac{|dz|}{|\boldsymbol{Im} z|}$. *Эта метрика задает на* U *геометрию Лобачевского.*

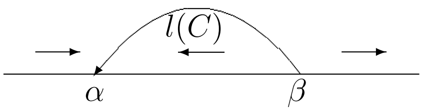
Пусть $A \in \mathsf{Aut}(U)$, то есть $Az = \frac{az+b}{cz+d}$, где $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ и $ad - bc > 0$. Неподвижные точки автоморфизма A являются корнями z_1, z_2 уравнения $cz^2 + (d - a)z - b = 0$.
Автоморфизм A называется:

(1) *Эллиптическим*, если $z_1, z_2 \notin \mathbb{R}$. В этом случае $z_2 = \overline{z}_1$ и автоморфизм A имеет одну неподвижную точку в U.
(2) *Параболическим*, если $z_1 = z_2$. В этом случае $z_1 = z_2 \in \mathbb{R}$ и у автоморфизма A нет неподвижных точек на U, и лишь одна неподвижная точка на $\mathbb{R} \cup \infty$. *Пример:* $z \mapsto z + b$.
(3) *Гиперболическим*, если $z_1 \neq z_2 \in \mathbb{R}$. В этом случае у автоморфизма A также нет неподвижных точек на U, зато ровно две неподвижные точки на $\mathbb{R} \cup \infty$. *Пример:* $z \mapsto \lambda z$.

Задача 4.3. *Доказать, что всякий параболический автоморфизм с неподвижной точкой* $a \in \mathbb{R}$ *сопряжен в группе* $\mathsf{Aut}(\Lambda)$ *с автоморфизмом* $z \mapsto z + 1$ *и имеет вид* $Cz = \dfrac{(1 - a\gamma)z + a^2\gamma}{-\gamma z + (1 + a\gamma)}$. *Если* $\gamma > 0$*, то* $C(r) > r$. *В окрестности точки a такой автоморфизм действует как показано на рисунке.*



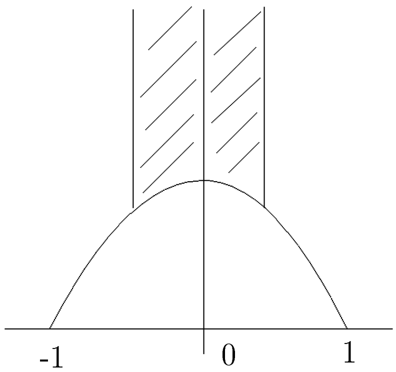
Задача 4.4. *Доказать, что всякий гиперболический автоморфизм с неподвижными точками $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ сопряжен в группе* $\mathsf{Aut}(\Lambda)$ *с автоморфизмом $z \mapsto \lambda z, \lambda > 0$, и имеет вид $Cz = \dfrac{(\lambda a - \beta)z + (1-\lambda)\alpha\beta}{(\lambda - 1)z + (\alpha - \lambda\beta)}$. При этом если $\lambda > 1$, то α — притягивающая, а β — отталкивающая неподвижные точки. Соединяющая их полуокружность $l(C)$ инвариантна относительно C (инвариантная прямая геометрии Лобачевского).*



Определение 4.4. *Дискретная подгруппа $\Gamma \subset$* $\mathsf{Aut}(U)$ *называется фуксовой группой.*

Пример. Следующая группа является фуксовой и называется *модулярной группой* $\Gamma = \{z \mapsto \dfrac{az+b}{cz+d} | a, b, c, d \in \mathbb{Z}, ad - bc > 0\} = \mathtt{PSL}(2, \mathbb{Z})$.

Задача 4.5. *Найти простые образующие и фундаментальную область модулярной группы. Указание, рассмотреть следующую область:*



4.3. **Пространство модулей комплексных торов.**

Определение 4.5. *Множество классов биголоморфной эквивалентности римановых поверхностей одинакового топологического типа называется пространством модулей.*

Задача 4.6. *Пусть $W \in \{\overline{\mathbb{C}}, \mathbb{C}, U\}$ и $\Gamma_1, \Gamma_2 \in$* $\mathsf{Aut}(W)$ *— дискретные группы, действующие без неподвижных точек. Доказать, что W/Γ_1 и W/Γ_2 биголоморфно эквивалентны, если и только если Γ_1 и Γ_2 сопряжены в группе* $\mathsf{Aut}(W)$, *то есть $\Gamma_1 = A\Gamma_2 A^{-1}$ для $A \in$* $\mathsf{Aut}(W)$.

Теорема 4.2. *Пространство модулей комплексных торов естественно отождествляется с пространством U/Γ, где Γ — модулярная группа.*

Proof. Согласно теореме 20.1, комплексный тор изоморфен $\mathbb{C}/\Gamma$, где Γ — группа параллельных переносов, порожденная переносами на вектора $f_1, f_2 \in \mathbb{C}$ причем $\frac{f_1}{f_2} \notin \mathbb{R} \cup \infty$. Согласно задаче 22.1, можно считать, что $f_2 = 1$ и $\mathbf{Im} f_1 > 0$, то есть $f_1 \in U$. Векторы $(1, \tau)$ и $(1, f_1)$ порождают одну и ту же дискретную группу, если и только если $K\begin{pmatrix} 1 \\ f_1 \end{pmatrix} \mathbb{R}) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ \tau \end{pmatrix}$, где $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathsf{SL}(2, \mathbb{Z}), K \in \mathbb{C}$, то есть $f_1 = \dfrac{a + b\tau}{c + d\tau}$. □

Следствие 4.1. *Пространство модулей комплексных торов имеет естественную структуру комплексной плоскости.*

4.4. Аналитические функции.

Определение 4.6. *Аналитической функцией называется множество $\{(U_b^\alpha, f_b^\alpha)\}$ аналитических продолжений канонического элемента (U_a, f_a) по всем путям с концами a и $b \in \mathbb{C}$. Две аналитические функции считаются равными, если они имеют хотя бы один совпадающий канонический элемент.*

Определение 4.7. *Пусть $\{(U_b^\alpha, f_b^\alpha)\}$ — аналитическая функция. Рассмотрим теоретико-множественное объединение V множеств U_b^α, то есть совокупность пар (z, U_b^α), где $z \in U_b^\alpha$. Будем считать, что точки (z, U_b^α) и $(\tilde{z}, U_{\tilde{b}}^{\tilde{\alpha}})$ эквивалентны, если $z = \tilde{z}$ и $f_b^\alpha = f_{\tilde{b}}^{\tilde{\alpha}}$ в некоторой окрестности точки $z = \tilde{z}$. Множество P_f, получающееся из V отождествлением эквивалентных точек, называется римановой поверхностью аналитической функции $\{(U_b^\alpha, f_b^\alpha)\}$. Соответствие $(z, U_b^\alpha) \mapsto z$ задает отображение $\phi_f : P_f \to \mathbb{C}$.*

Задача 4.7. *Множество $\{(U_b^\alpha, f_b^\alpha)\}$ можно рассматривать как атлас на P_f. Докажите, что этот атлас определяет структуру римановой поверхности на P_f, относительно которой ϕ_f — голоморфное отображение, то есть такое, что все функции $\phi_f(f_b^\alpha)^{-1} : U_b^\alpha \to \mathbb{C}$ голоморфны.*

Таким образом, риманову поверхность P_f можно рассматривать как естественную область определения "многозначной" аналитической функции f, на которой функция $f = \varphi_f$ становится однозначной.

Задача 4.8. *Пусть Λ_f — односвязная накрывающая римановой поверхностью P_f, $\psi_f : \Lambda_f \to P_f$ естественная проекция и $f_\Lambda = f\psi_f$. Докажите, что если $\mathsf{Aut}(P_f) = 1$, то риманова поверхность P_f биголоморфно эквивалентна римановой поверхности Λ_f/Γ_f, где $\Gamma_f = \{g \in \mathsf{Aut}(\Lambda_f) | f_\Lambda g = f_\Lambda\}$.*

5. Эффективизация теоремы Римана.

5.1. Гармонические функции.

Определение 5.1. *Вещественная функция $u(x, y)$ с непрерывными вторыми частными производными называется гармонической в области D, если она удовлетворяет в этой области уравнению Лапласа $\Delta u = 0$, где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{1}{4}\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}$ — оператор Лапласа.*

Гармонические функции естественно возникают при решении широкого круга прикладных задач от гидромеханики до теоретической физики.

Мы будем часто отождествлять область определения $D \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ с соответствующей областью на $\mathbb{C}$, пологая $z = x + iy$. Более того, мы немного обобщим определение гармонической функции, считая, что $D \subset \bar{\mathbb{C}}$

Теорема 5.1. *Функция u является гармонической, если и только если в окрестности каждой точки она совпадает с вещественной частью некоторой голоморфной функции.*

Proof. Пусть $f(x, y) = u(x, y)+v(x, y)$ — голоморфная функция. Тогда условия Коши-Римана дают $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ дают $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

Пусть $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$. Тогда функция $g(z) = g(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}$ удовлетворяет условиям Коши-Римана и, следовательно, голоморфна. Рассмотрим ее первообразную $f(x, y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} g(z)dz$. Тогда $\mathtt{Re} f(x, y) = u(x_0, y_0) + \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} (\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy) = u(x, y)$. □

Задача 5.1. *Доказать, что функция u является гармонической, если и только если в окрестности каждой точки она совпадает с мнимой часть некоторой голоморфной функции.*

Тесная связь между гармоническими и голоморфными функциями позволяет легко переносить на гармонические функции многие свойства голоморфных.

Задача 5.2. *Доказать, что:*

- *Гармоническая в области функция бесконечно дифференцируема в ней, причем все производные также гармонические;*
- *Биголоморфная замена области определения переводит гармоническую функцию в гармоническую;*
- *Гармонические функции, совпадающие на открытом множестве совпадают на всей области определения;*
- *Если гармоническая функция достигает в области локального экстремума, то она постоянна;*
- *Гармоническая на $\mathbb{C}$ или постоянна или неограничена сверху и с низу;*

5.2. **Интегральные формулы для гармонической функции.** Далее мы обозначаем через $D \in \mathbb{C}$ связную односвязную область, граница которой $C \in \mathbb{C}$ является аналитической кривой. Говоря, что функция f дифференцируема, голоморфна, гармоническая и т.п. в D мы будем подразумевать, что она определена и обладает этим свойством в некоторой окрестности $\bar{D}$.

Через $\frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial}{\partial y}\sin\theta$ будет обозначаться производная по направлению нормали к кривой C.

Задача 5.3. *Использую формулу Грина доказать, что*

$$\oint_C \varphi\frac{\partial \psi}{\partial n}ds = \int\int_D (\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial y})dxdy + \int\int_D \varphi(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2})dxdy,$$

если φ, ψ дважды непрерывно дифференцируемых в D.

Теорема 5.2. *Пусть функция $u(z)$ и $v(z)$ гармонические и дважды непрерывно дифференцируемые функции в D. Тогда*

$$\oint_C (u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n})ds = 0,$$

$$u(\xi) = \frac{1}{2\pi\rho} \oint_{|z-\xi|=\rho} u(z) ds$$

при $U_\rho = \{z \in \mathbb{C} | |z - \xi| < \rho\} \subset D$ *и*

$$\oint_C \{u(z) \frac{\partial}{\partial n} \ln|z - \xi| - \frac{\partial u}{\partial n} \ln|z - \xi|\} ds = \delta 2\pi u(\xi),$$

где $\delta = 1$ *при* $\xi \in D$ *и* $\delta = 0$ *при* $\xi \in \mathbb{C} \setminus \bar{D}$

Proof. Первая формула сразу следует из задачи 5.3. Функция $v(z) = \ln|z - \xi| = \mathtt{Re}(\ln(z - \xi))$ является вещественной часть голоморфной функции при $0 < |z - \xi| < \infty$ и, следовательно, гармоническая на $\mathbb{C} \setminus \xi$. По-этому, из уже доказанной части теоремы следует, что $\oint_C \{u(z) \frac{\partial}{\partial n} \ln|z - \xi| - \frac{\partial u}{\partial n} \ln|z - \xi|\} ds = 0$ при $\xi \in \mathbb{C} \setminus \bar{D}$.

Пусть теперь $\xi \in D$. Рассмотрим окрестность $U_\rho = \{z \in \mathbb{C} | |z - \xi| < \rho\} \subset D$ и область $D_\rho = D \setminus U_\rho$. Тогда, из только что доказанного утверждения следует, что $\oint_{\partial D_\rho} \{u(z) \frac{\partial}{\partial n} \ln|z - \xi| - \frac{\partial u}{\partial n} \ln|z - \xi|\} ds = 0$. Таким образом $\oint_C \{u(z) \frac{\partial}{\partial n} \ln|z - \xi| - \frac{\partial u}{\partial n} \ln|z - \xi|\} ds = \oint_{\partial U_\rho} u(z) \frac{\partial}{\partial n} \ln|z - \xi| ds - \oint_{\partial U_\rho} \frac{\partial u}{\partial n} \ln|z - \xi| ds.$

С другой стороны, $\ln|z - \xi| = \rho$ на ∂U_ρ и, следовательно, второй интеграл равен 0, согласно уже доказанной первой формуле теоремы. Кроме того, $\frac{\partial}{\partial n} \ln|z - \xi| = \frac{\partial}{\partial r} \ln r|_{r=\rho} = \frac{1}{\rho}$ и, следовательно, $\oint_C \{u(z) \frac{\partial}{\partial n} \ln|z - \xi| - \frac{\partial u}{\partial n} \ln|z - \xi|\} ds = \frac{1}{\rho} \oint_{\partial U_\rho} u(z) ds.$

Левая часть равенства не меняется при $\rho \to 0$ и, откуда, $\oint_C \{u(z) \frac{\partial}{\partial n} \ln|z - \xi| - \frac{\partial u}{\partial n} \ln|z - \xi|\} ds = \frac{1}{\rho} \oint_{\partial U_\rho} u(z) ds = 2\pi u(\xi).$ □

5.3. **Функция Грина.**

Определение 5.2. *Функцией Грина* $G = G_D$ *в области* D *называется функция* $G(z, \xi) = \frac{1}{2\pi} \ln|z - \xi| + g(z, \xi)$ *на* $D \times D$, *если*

- $G(z, \xi) = G(\xi, z)$ *и* $G(z, \xi') = 0$ *при любых* $z \in D$ *и* $\xi' \in \partial D$;
- *функция* $g(z, \xi)$ *непрерывна в* $D \times D$ *и непрерывна по* ξ *в* $\bar{D}$ *при любом* $z \in D$
- *функция* $g(z, \xi)$ *гармонична по* z *при любом* $\xi \in D$ *и гармонична по* ξ *при любом* $z \in D$.

Задача 5.4. *Доказать, что существует не более одной функции Грина.*

Функция Грина существует и тесно связна с биголоморфным отображением $w : D \to U = \{z \in \mathbb{C} | |z| < 1\}$ на единичный диск, существующим согласно теореме Римана.

Теорема 5.3. *Положим* $w_\xi = \frac{w(z) - w(\xi)}{1 - w(z)\overline{w(\xi)}}$. *Тогда* $G(z, \xi) = G(\xi, z) = \frac{1}{2\pi} \ln|w_\xi|$ *— функция Грина области* D.

Proof. Из определений сразу следует, функция $\frac{w_\xi}{z - \xi}$ голоморфна на D по z при любом $\xi \in D$. Таким образом функция $g(z, \xi) = \ln|\frac{w_\xi}{z - \xi}| = \mathtt{Re} \ln \frac{w_\xi}{z - \xi}$ гармонична на D по z при любом $\xi \in D$. Непрерывность функции $g(z, \xi)$ также очевидна. Кроме того $|w_\xi(z)| = |w_z(\xi)|$, откуда $G(z, \xi) = G(\xi, z)$ и, значит, $g(z, \xi)$ гармонична на D по ξ при любом $z \in D$. И, наконец, согласно теореме о соответствии границ 3.9, $|w_\xi(z)| = 1$, если одна из точек z или ξ принадлежит C. □

Доказанную теорему можно эффективно использовать для вычисления функции Грина в простых областях. В частности, для единичного диска $U = \{z \in \mathbb{C} || z| < 1\}$, $w_\xi(z) = \frac{(z-\xi)}{1-z\bar{\xi}}$ и функция Грина $G_U(z,\xi) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{|z-\xi|}{|1-z\bar{\xi}|}$. Для правой полуплоскости $\Lambda = \{z \in \mathbb{C} | \mathtt{Re} z > 0\}$, $w_\xi(z) = \frac{z-\xi}{z+\bar{\xi}}$ и функция Грина $G_\Lambda(z,\xi) = \frac{1}{2\pi}\ln|\frac{z-\xi}{z+\bar{\xi}}|$.

5.4. **Задача Дирихле.**

Определение 5.3. *Задача Дирихле состоит в отыскании функции u, гармонической в области D и непрерывной на замыкании $\bar{D}$ по ее (ограниченному, непрерывному) значению $u|_C = \varphi$ на граничном контуре.*

Задача 5.5. *Доказать, что задача Дирихле имеет не более одного решения.*

Функция Грина дает решение задачи Дирихле в следующем смысле.

Теорема 5.4. *Пусть $G(z,\xi) = G_D(z,\xi)$ — функция Грина в области D. Тогда функция $u(z) = \int_C u(\xi)\frac{\partial}{\partial n}G(z,\xi)|d\xi|$ решает задачу Дирихле.*

Proof. Согласно нашим определениям, $G(z,\xi) = \frac{\ln r}{2\pi} + g(z,\xi)$, где $r = |z-\xi|$. Согласно теореме 5.2, $2\pi u(z) = \oint_C\{u\frac{\partial \ln r}{\partial n} - \frac{\partial u}{\partial n}\ln r\}|d\xi|$ и $\oint_C\{u\frac{\partial g}{\partial n} - g\frac{\partial u}{\partial n}\}|d\xi| = 0$, при $z \in D$. Следовательно $\oint_C\{u\frac{\partial G}{\partial n} - G\frac{\partial u}{\partial n}\}|d\xi| = u(z)$. Кроме того, $G(z,\xi) = 0$ при $\xi \in C$. □

Найденные функции Грина для простых областей позволяют решать для них задачу Дирихле. Функции Грина для диска U равна, как мы знаем, $G_U(z,\xi) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{|z-\xi|}{|1-z\bar{\xi}|}$. Положим $z = re^{i\varphi}$, $\xi = \rho e^{i\theta}$. Тогда $\frac{\partial}{\partial n}G(re^{i\varphi},\rho e^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\mathtt{Re}\frac{\partial}{\partial\rho}\ln\frac{re^{i\varphi}-\rho e^{i\theta}}{1-r\rho e^{i(\varphi-\theta)}}|_{\rho=1} = \frac{1}{2\pi}\mathtt{Re}\{\frac{e^{i\theta}}{\rho e^{i\theta}-re^{i\varphi}} + \frac{re^{i(\theta-\varphi)}}{1-r\rho e^{i(\theta-\varphi)}}\} = \frac{1}{2\pi}\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\theta-\varphi)}$. Таким образом задача Дирихле для диска дается решается *формулой Пуассона для диска* $|z| < 1$:

$$u(re^{i\varphi}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\theta-\varphi)}u(Re^{i\varphi})d\theta$$

.

Задача 5.6. *Доказать формулой Пуассона для правой полуплоскости $\mathtt{Re} z > 0$:*

$$u(x+iy) = \frac{x}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u(i\eta)d\eta}{(y-\eta)^2+x^2}$$

.

Задача 5.7. *Найти формулы Шварца для диска и верхней полуплоскости, восстанавливающие голоморфную функцию по значению ее вещественной части на границе.*

5.5. **Формула для голоморфного отображения области в круг.** Материал этой главы основан на работах Р. Вигмана, А. Забродина, А. Маршакова (1999-2003 годы)

Рассмотрим пространство $\mathcal{H}$ всех, содержащих ∞ односвязных областей с аналитической границей на сфере Римана, замыкание которых не содержит 0.

В качестве координат в этом бесконечномерном пространстве обычно рассматривают *гармонические моменты Ричардсона.*

$$t_0 = \frac{1}{\pi}\iint\limits_{(\mathbb{C}\setminus Q)\times(\mathbb{C}\setminus Q)} dxdy, \qquad t_k = -\frac{1}{\pi k}\iint\limits_{Q\times Q} z^{-k}dxdy \quad (k = 1,2,...).$$

Функции на $\mathcal{H}$, которые мы будем рассматривать, не голоморфны по $\{t_k\}$. Поэтому (как мы и раньше поступали в таких случаях) нам будет удобно считать, что эти функции раскладываются в ряд по независимым переменным $\{t_k\}$ и $\{\bar{t}_k\}$.

Положим

$$\partial_0 = \frac{\partial}{\partial t_0}, \quad D(z) = \sum_{k\geq 1} \frac{z^{-1}}{k}\frac{\partial}{\partial t_i}, \quad \bar{D}(\bar{z}) = \sum_{k\geq 1} \frac{\bar{z}^{-1}}{k}\frac{\partial}{\partial \bar{t}_i}, \quad \nabla(z) = \partial_0 + D(z) + \bar{D}(\bar{z}).$$

Через $Q^t \in \mathcal{H}$ будут обозначаться области, отвечающие координатам $t = \{t_0, t_1, \bar{t}_1, t_2, \bar{t}_2, ...\}$. Области Q^t отвечает биголоморфное отображение $w(z,t) = w_{Q^t}(z) : Q^t \to \hat{U}_1$, нормированное условиями $w_{Q^t}(\infty) = \infty$ и $\mathtt{Im}\partial_z w_{Q^t}(\infty) = 0$, $\mathtt{Re}\partial_z w_{Q^t}(\infty) > 0$. Отображение имеет вид $w(z,t) = p(t)z + \sum\limits_{j=0}^{\infty} p_j(t) z^{-j}$. В этом параграфе мы докажем существование функции $F(t)$, порождающей функции $p(t), p_0(t), p_1(t), ...$.

Для $Q \in \mathcal{H}$ положим

$$G(z,\xi) = G_Q(z,\xi) = \frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{w(z) - w(\xi)}{1 - w(z)\overline{w(\xi)}} \right|.$$

Задача 5.8. *Функция $G(z,\xi)$ является функцией Грина для области Q, то есть удовлетворяет свойствам из определения 5.2 и решает задачу Дирихле (теорема 5.4).*

Обозначим через $\mathcal{H}_z \subset \mathcal{H}$ подмножество областей, содержащих точку $z \in \mathbb{C}$. Сопоставим области $Q \in \mathcal{H}_z$ область Q_ε, получающуюся из области Q сдвигом границы на величину $-\epsilon\pi\frac{\partial}{\partial n}G_Q(z,\xi)$ в направлении внешней нормали к границе области. Обозначим через δ_z векторное поле на $\mathcal{H}_z$, которое переводит функцию $X : \mathcal{H}_z \to \mathbb{C}$ в функцию, принимающую на области Q значение $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon}(X(Q_\varepsilon) - X(Q))$.

Лемма 5.1. $\delta_z X = \nabla(z) X$.

Proof. Если $X(Q) = \iint\limits_{Q\times Q} f dxdy$, то $\delta_z X = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \epsilon \iint\limits_{Q_\varepsilon \setminus Q} f(\xi)(-\epsilon\pi)\frac{\partial}{\partial n} G_Q(z,\xi) dxdy = - \pi \oint\limits_{\partial Q} f(\xi) \frac{\partial}{\partial n} G_Q(z,\xi) d|\xi| = -\pi f(z)$. Таким образом $\delta_z(t_0) = 1$ и $\delta_z(t_k) = -\frac{1}{\pi k}\oint_{\partial Q} \xi^{-k}(-\pi\frac{\partial}{\partial n}G_Q(z,\xi))|d\xi| = \frac{z^{-k}}{k}$ при $k > 0$. Аналогично,$\delta_z(\bar{t}_k) = \frac{\bar{z}^{-k}}{k}$. Отсюда $\delta_z(X) = \frac{\partial X}{\partial t_0}\delta_z t_0 + \sum \frac{\partial X}{\partial t_k}\delta_z t_k + \sum \frac{\partial X}{\partial \bar{t}_k}\delta_z \bar{t}_k = \partial_0 + \sum_{k\geq 1} \frac{z^{-1}}{k}\partial_k + \sum_{k\geq 1}(\bar{z})\frac{\bar{z}^{-1}}{k}\bar{\partial}_k$. □

Лемма 5.2. *Положим* $\tilde{G}_Q(z_1,z_2) = \frac{1}{\pi} G_Q(z_1,z_2)$. *Тогда* $\nabla(z_3)\tilde{G}_Q(z_1,z_2) = \pi^2 \oint\limits_{\partial Q} \frac{\partial}{\partial n}\tilde{G}_Q(z_1,\xi)\frac{\partial}{\partial n}\tilde{G}_Q(z_2,\xi)\frac{\partial}{\partial n}\tilde{G}_Q(z_3,\xi)|d\xi|$.

Proof. Рассмотрим точку $\xi \in \partial Q$ и точку ξ', получающуюся из ξ сдвигом по направлению внешней нормали $n(\xi)$ на величину $-\epsilon\pi$. Сдвинутая кривая является границей области $Q' = Q \cup \delta Q$. Равенство $G_Q(z_1,\xi) = 0$ влечет $G_Q(z_1,\xi') = -\epsilon\pi\frac{\partial}{\partial n}G_Q(z_1,\xi)n(\xi) + o(\epsilon)$. Таким образом $G_{Q'}(z_1,\xi) - G_Q(z_1,\xi)$ — гармоническая функция, равная $-\epsilon\pi\frac{\partial}{\partial n}G_Q(z_1,\xi)n(\xi) + o(\epsilon)$ на ∂Q. Решая заду Дирихле находим, *формулу Адамара* $G_{Q'}(z_1,z_2) - G_Q(z_1,z_2) = -\varepsilon\pi \oint\limits_{\partial Q} \frac{\partial}{\partial n}G_Q(z_1,\xi)\frac{\partial}{\partial n}G_Q(z_2,\xi)n(\xi)|d\xi|$ Таким образом, согласно нашим определениям, $\delta_{z_3} G_Q(z_1, z_2) = \pi^2 \oint\limits_{\partial Q} \frac{\partial}{\partial n} G_Q(z_1, \xi) \frac{\partial}{\partial n} G_Q(z_2, \xi) \frac{\partial}{\partial n} G_Q(z_3, \xi)|d\xi|$.

Применение леммы 5.1 завершает доказательство. □

Задача 5.9. *Используя лемму 5.2 доказать, что при* $z_1 \neq z_2$ *существует функция* $\tilde{F}(t)$ *такая, что* $G_Q(z_1, z_2) = g(z_1, z_2) + \frac{1}{4\pi}\nabla(z_1)\nabla(z_2)\bar{F}$, *где* $g(z_1, z_2)$ *не зависит от* Q.

Теорема 5.5. *Существует функция* $F(t)$, *такая, что выполняются следующие равенства*

$$w(z,t) = zexp((-\frac{1}{2}\partial_0^2 - \partial_0 D(z))F(t))$$

$$(z-\xi)e^{D(z)D(\xi)F} = ze^{-\partial_0 D(z)F} - \xi e^{-\partial_0 D(\xi)F},$$
$$(\bar{z}-\bar{\xi})e^{\bar{D}(\bar{z})\bar{D}(\bar{\xi})F} = \bar{z}e^{-\partial_0 \bar{D}(\bar{z})F} - \bar{\xi} e^{-\partial_0 \bar{D}(\bar{\xi})F},$$
$$1 - e^{-D(z)\bar{D}(\bar{\xi})F} = \frac{1}{z\bar{\xi}}e^{\partial_0(\partial_0 + D(z) + \bar{D}(\bar{\xi}))F}.$$

Proof. Из свойств функции Грина следует, что $G_Q(z,\xi) = \frac{1}{2\pi}\ln|z^{-1} - \xi^{-1}| + \tilde{h}(z,\xi)$, где $\tilde{h}(z,\xi)$ разлагается в ряд по z^{-k}, ξ^{-k}. Сопоставляя с задачей 5.9 находим, что $\frac{1}{2\pi}\ln\left|\frac{w(z)-w(\xi)}{1-w(z)\overline{w(\xi)}}\right| = G_Q(z,\xi) = \frac{1}{2\pi}\ln|z^{-1} - \xi^{-1}| + h(z,\xi) + \frac{1}{4\pi}\nabla(z)\nabla(\xi)\tilde{F}$, где $h(z,\xi)$ не зависит от Q и разлагается в ряд по z^{-k}, ξ^{-k}. Поэтому $h(z_1, z_2) + \frac{1}{4\pi}\nabla(z_1)\nabla(z_2)\tilde{F} = \frac{1}{4\pi}\nabla(z_1)\nabla(z_2)F$ для некоторого $F = F(t)$. Тогда

$$\ln\left|\frac{w(z)-w(\xi)}{1-w(z)\bar{w}(\xi)}\right| = \ln\left|\frac{1}{z} - \frac{1}{\xi}\right| + \frac{1}{2}\nabla(z)\nabla(\xi)F$$

.

Умножая на 2 получаем

$$h = \ln\left|\frac{w(z)-w(\xi)}{1-w(z)\bar{w}(\xi)}\right|^2 - \ln\left|\frac{1}{z} - \frac{1}{\xi}\right|^2 - \nabla(z)\nabla(\xi)F = 0$$

.

Переходя к пределу $\xi \to \infty$ находим $\ln|w(z)|^2 = \ln|z|^2 - \partial_0\nabla(z)F$. Откуда переходя к пределу $z \to \infty$ находим

$$\ln(p) = -\frac{1}{2}\partial_0^2 F.$$

Раскладывая h в сумму голоморфной, антиголоморфной и постоянной части по z находим что

$$h_1 = \ln\left(\frac{w(z)-w(\xi)}{1-w(z)\bar{w}(\xi)}\right) - \ln\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{\xi}\right) - D(z)\nabla(\xi)F$$

и

$$h_2 = \ln\left(\frac{\bar{w}(z)-\bar{w}(\xi)}{1-\bar{w}(z)w(\xi)}\right) - \ln\left(\frac{1}{\bar{z}} - \frac{1}{\bar{\xi}}\right) - \bar{D}(\bar{z})\nabla(\xi)F$$

— не зависят от z. Переходя к пределу $z \to \infty$ находим, что

$$h_1 = \ln\left(-\frac{1}{\bar{w}(\xi)}\right) - \ln\left(-\frac{1}{\xi}\right), \quad h_2 = \ln\left(-\frac{1}{w(\xi)}\right) - \ln\left(-\frac{1}{\bar{\xi}}\right).$$

Уравнивая, два выражения для h_1 находим, что

$$D(z)\nabla(\xi)F = \left(\ln\left(\frac{w(z)-w(\xi)}{1-w(z)\bar{w}(\xi)}\right) - \ln\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{\xi}\right)\right) - \left(\ln\left(-\frac{1}{\bar{w}(\xi)}\right) - \ln\left(-\frac{1}{\xi}\right)\right) =$$

$$\ln\left(\frac{w(z)-w(\xi)}{z-\xi}\frac{-z\bar{w}(\xi)}{1-w(z)\bar{w}(\xi)}\right) = \ln\left(\frac{w(z)-w(\xi)}{z-\xi}\right) + \ln\left(\frac{\frac{z}{w(z)}}{\frac{1}{-w(z)\bar{w}(\xi)}+1}\right).$$

Переход к пределу $\xi \to \infty$ дает

$$D(z)\partial_0 F = \ln(p) + \ln\left(\frac{z}{w(z)}\right).$$

Сопоставляя с $\ln(p) = -\frac{1}{2}\partial_0^2 F$ находим $\ln\left(\frac{z}{w(z)}\right) = D(z)\partial_0 F + \frac{1}{2}\partial_0^2 F$, что эквивалентно

$$w(z,t) = zexp((-\frac{1}{2}\partial_0^2 - \partial_0 D(z))F(t)).$$

Голоморфная часть равенства $D(z)\nabla(\xi)F = \ln\left(\frac{w(z)-w(\xi)}{z-\xi}\right) + \ln\left(\frac{\frac{z}{w(z)}}{\frac{1}{-w(z)\bar{w}(\xi)}+1}\right)$ дает $\ln\left(\frac{w(z)-w(\xi)}{z-\xi}\right) + \ln\left(\frac{z}{w(z)}\right) = D(z)\partial_0 F + D(z)D(\xi)F$, то есть

$$ze^{-\partial_0 D(z)F} = (z-\xi)e^{D(z)D(\xi)F}\frac{w(z)}{w(z)-w(\xi)}.$$

Меняя местами z и ξ находим

$$\xi e^{-\partial_0 D(\xi)F} = (\xi - z)e^{D(z)D(\xi)F}\frac{w(\xi)}{w(\xi)-w(z)}$$

. Таким образом

$$ze^{-\partial_0 D(z)F} - \xi e^{-\partial_0 D(\xi)F} = (z-\xi)e^{D(z)D(\xi)F}.$$

Заменяя (z,ξ) на $(\bar{z},\bar{\xi})$ находим равенство

$$\bar{z}e^{-\partial_0 \bar{D}(\bar{z})F} - \bar{\xi}e^{-\partial_0 \bar{D}(\bar{\xi})F} = (\bar{z}-\bar{\xi})e^{\bar{D}(\bar{z})\bar{D}(\bar{\xi})F}$$

Антиголоморфная по ξ часть формулы $D(z)\nabla(\xi)F = \ln\left(\frac{w(z)-w(\xi)}{z-\xi}\right) + \ln\left(\frac{\frac{z}{w(z)}}{\frac{1}{-w(z)\bar{w}(\xi)}+1}\right)$ дает $D(z)\bar{D}(\bar{\xi})F = -\ln\left(1-\frac{1}{w(z)\bar{w}(\xi)}\right)$. Подставляя сюда $w(z,t) = zexp((-\frac{1}{2}\partial_0^2 - \partial_0 D(z))F(t))$ находим

$$1 - e^{-D(z)\bar{D}(\bar{\xi})F} = \frac{1}{z\bar{\xi}}e^{\partial_0(\partial_0 + D(z) + \bar{D}(\bar{\xi}))F}.$$

□

Задача 5.10. *Доказать, что* $\nabla(z)F = v_0 + 2Re\frac{v_k}{k}z^{-1}$, *где* $v_0 = \partial_0 F = \frac{2}{\pi}\iint\limits_{(\mathbb{C}\backslash Q^t)\times(\mathbb{C}\backslash Q^t)} \ln|z|dxdy$ *и* $v_k = \frac{\partial}{\partial t_k}F = \frac{1}{\pi}\iint\limits_{(\mathbb{C}\backslash Q^t)\times(\mathbb{C}\backslash Q^t)} z^k dxdy$

5.6. **Эффективизация теоремы Римана.** Теорема 5.5 сводит проблему восстановления произвольной области по ее моментам Ричардсона к проблеме построения одной единственной функции $F(t)$. Эта же функция возникает и в некоторых моделях теоретической физики (матричные модели, топологическая гравитация и др.). В теоретической физике она возникает как квазиоднородно решение интегрируемой иерархии "бездисперсионная двумерная цепочка Тоды". Согласно которая К.Таксаки, Т.Такебе (1995) нужные дифференциальные уравнения на $F(t)$ возникают из разложений по z и ξ уравнений

$$(z-\xi)e^{D(z)D(\xi)F} = ze^{-\partial_0 D(z)F} - \xi e^{-\partial_0 D(\xi)F},$$

$$(\bar{z}-\bar{\xi})e^{\bar{D}(\bar{z})\bar{D}(\bar{\xi})F} = \bar{z}e^{-\partial_0 \bar{D}(\bar{z})F} - \bar{\xi} e^{-\partial_0 \bar{D}(\bar{\xi})F},$$

$$1 - e^{-D(z)\bar{D}(\bar{\xi})F} = \frac{1}{z\bar{\xi}}e^{\partial_0(\partial_0 + D(z) + \bar{D}(\bar{\xi}))F}.$$

Этим же уравнениям, согласно теореме 5.5, удовлетворяет и функция эффективизирующая теорему Римана. Оказывается, что нужное решение иерархии полностью определяется своим ограничением и ограничением ее первых производных на прямую $t_1 = t_2 = \cdots = 0$.

Ограничение функции F на пятимерное пространство $t_3 = t_4 = \cdots = 0$ имеет довольно простой вид (П.Вигман, Ф.Забродин 1999)

$$F(t_0, t_1, \bar{t}_1, t_2, \bar{t}_2) = -\frac{3}{4}t_0^2 + \frac{1}{2}t_0^2 \ln\left(\frac{t_0}{1-4|t_2|^2}\right) + \frac{t_0}{1-4|t_2|^2}\left(|t_1|^2 + t_1^2\bar{t}_2 + \bar{t}_1^2 t_2\right).$$

Формальный тейлоровкий ряд для полного решения F дается следующей теоремой (С.Натанзон 2002-2003).

Теорема 5.6. *Функция $F(t)$ из теоремы 5.5 описывается формальным рядом Тейлора*

$$F = \frac{1}{2}t_0^2 \ln t_0 - \frac{3}{4}t_0^2 +$$

$$\sum \frac{i_1^{n_1}\dots i_k^{n_k}}{n_1!\dots n_k!}\,\frac{\bar{i}_1^{\bar{n}_1}\dots \bar{i}_{\bar{k}}^{\bar{n}_{\bar{k}}}}{\bar{n}_1!\dots \bar{n}_{\bar{k}}!}\cdot N_i^2\begin{pmatrix} i_1,\dots,i_k|\bar{i}_1,\dots,\bar{i}_{\bar{k}} \\ n_1,\dots,n_k|\bar{n}_1,\dots,\bar{n}_{\bar{k}}\end{pmatrix} t_0^{i-(n_1+\dots+n_k+\bar{n}_1+\dots+\bar{n}_{\bar{k}})+2} t_{i_1}^{n_1}\dots t_{i_k}^{n_k}\bar{t}_{\bar{i}_1}^{\bar{n}_1}\dots\bar{t}_{\bar{i}_{\bar{k}}}^{\bar{n}_{\bar{k}}},$$

где сума берется по $k, \bar{k}, n_r, \bar{n}_r \geqslant 1, 0 < i_1 < \cdots < i_k, 0 < \bar{i}_1 < \cdots < \bar{i}_{\bar{k}}$, $i - (n_1 + \cdots + n_k + \bar{n}_1 + \cdots + \bar{n}_{\bar{k}}) + 2 \geqslant 0$ и коэффициенты $N_i^2\begin{pmatrix} i_1,\dots,i_k|\bar{i}_1,\dots,\bar{i}_{\bar{k}} \\ n_1,\dots,n_k|\bar{n}_1,\dots,\bar{n}_{\bar{k}}\end{pmatrix}$ можно найти с помощью следующих рекуррентных формул:

(1) $P_{i,j}(s_1,\dots,s_m) = |\{(i_1,\dots,i_m) \mid i = i_1 + \cdots + i_m,\ 1 \leqslant i_r \leqslant s_r - 1\}|$,

(2) $T^1_{i,j}(s_1,\dots,s_m) = \frac{1}{kn_1!\dots n_k!}\, P_{i,j}\left(\underbrace{s_1 + \cdots + s_{n_1}}_{n_1}, \dots, \underbrace{s_{n_1+\dots+n_{k-1}+1} + \cdots + s_{n_1+\dots+n_k}}_{n_k}\right)$,

где сумма берется по $k \geqslant 1$, $n_1 + \cdots + n_k = m$, $n_r \geqslant 1$

(3) $T^2_{i_1,i_2}\begin{pmatrix} s_1,\dots,s_m \\ 1,\dots,1\end{pmatrix} = T^1_{i_1,i_2}(s_1,\dots,s_m)$,

$T^2_{i_1,\dots,i_k}\begin{pmatrix} s_1,\dots,s_m \\ 1,\dots,1\end{pmatrix} = \sum lT^1_{s,i_k}(s_i,\dots,s_j)\, T^2_{i_1,\dots,i_{k-1}}\begin{pmatrix} s_1,\dots,s_{i-1},s,s_{j+1},\dots,s_m \\ l_1,\dots,l_{i-1},l,l_{j+1},\dots,l_m\end{pmatrix}$

где сумма берется по $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant m$; $s, l \geqslant 1$ и $s = s_i + \cdots + s_j - i_k$, $l = (l_i - 1) + \cdots + (l_j - 1)$;

(4) $S_{\bar{i}_1,\ldots,\bar{i}_{\bar{k}}}\begin{pmatrix} s_1,\ldots,s_m \\ l_1,\ldots,l_m \end{pmatrix} = \sum \frac{(s_1-1)!}{(s_1-n_1-l_1+1)!(l_1-1)!} \times \cdots \times \frac{(s_m-1)!}{(s_m-n_m-l_m+1)!(l_m-1)!}$, *где сумма берется по* $\{\bar{i}_1^1,\ldots,\bar{i}_1^{n_1}\} \sqcup \cdots \sqcup \{\bar{i}_m^1,\ldots,\bar{i}_m^{n_m}\} = \{\bar{i}_1,\ldots,\bar{i}_{\bar{k}}\}, \quad \bar{i}_r^1+\cdots+\bar{i}_r^{n_r} = s_r, \quad s_r-n_r-\ell_r+1 \geqslant 0$

(5) $N_i^1(i_1,\ldots,i_k|\bar{i}_1,\ldots,\bar{i}_{\bar{k}}) = 0$ *if* $i \neq i_1+\cdots+i_k$ *или* $i \neq \bar{i}_1+\cdots+\bar{i}_{\bar{k}}$;
в других случаях $N_i^1(i|\bar{i}_1,\ldots,\bar{i}_{\bar{k}}) = \frac{(i-1)!}{(i-\bar{k}+1)!}$; $N_i^1(i_1,\ldots,i_k|\bar{i}) = \frac{(i-1)!}{(i-k+1)!}$;

$$N_i^1(i_1,\ldots,i_k|\bar{i}_1,\ldots,\bar{i}_{\bar{k}}) = \sum(-1)^{m+1} S_{\bar{i}_1,\ldots,\bar{i}_{\bar{k}}}\begin{pmatrix} s_1, & \ldots, & s_m \\ l_1, & \ldots, & l_m \end{pmatrix} T^2_{i_1,\ldots,i_k}\begin{pmatrix} s_1, & \ldots, & s_m \\ l_1, & \ldots, & l_m \end{pmatrix},$$

где сумма берется по $m \geqslant 1; s_1+\cdots+s_m = i_1+\cdots+i_k; l_1+\cdots+l_m = m+k-2; s_r, l_r \geqslant 1;$

(6) $N_i^2\begin{pmatrix} i_1,\ldots,i_k|n_1,\ldots,n_k \\ \bar{i}_1,\ldots,\bar{i}_{\bar{k}}|\bar{n}_1,\ldots,\bar{n}_{\bar{k}} \end{pmatrix} = N_i^1(\underbrace{i_1,\ldots,i_1}_{n_1},\ldots,\underbrace{i_k,\ldots,i_k}_{n_k}|\underbrace{\bar{i}_1,\ldots,\bar{i}_1}_{\bar{n}_1},\ldots,\underbrace{\bar{i}_{\bar{k}},\ldots,\bar{i}_{\bar{k}}}_{\bar{n}\bar{k}}).$

Доказательство довольно длинное и состоит в вычислении ограничений всех частных производных функции F ни прямую $t_1 = t_2 = \cdots = 0$.

Вопрос о сходимости формального ряда довольно труден. Тут имеется лишь следующий результат (Ю.Климов, А.Корж, С.Натанзон 2002)

Теорема 5.7. *Пусть* $\tilde{t} = (t_0, t_1, \bar{t}_1, t_2, \bar{t}_2, \ldots)$ *такие, что* $t_i, \bar{t}_i = 0$ *для* $i > n, 0 < t_0 < 1$ *и* $|t_i|,\ |\bar{t}_i| \leqslant (4n^3 2^n e^n)^{-1}$*. Тогда ряд* $F(\tilde{t})$ *сходится.*

Формула
$$w(z,t) = zexp((-\frac{1}{2}\partial_0^2 - \partial_0 D(z))F(t)),$$
дает коэффициенты мероморфной функции, отображающей область в круг в виде универсальных рядов по t. Исследование их сходимости важная и пока не решенная задача.

Формула, которую мы обсуждаем может оказаться полезной для различных прикладных задач. Обратная задача теории потенциала, которую эта формула решает, используется при оценки месторождений полезных ископаемых. Конформные отображения, явный вид которых дается формулой, используются в гидродинамики и при аэродинамических расчетах крыла.

Формула дает не только отображения области на область но и картину эволюции одной области в другую. Оказывается это можно использовать для описания эволюции нефтяного пятна и эволюции нефтяного пласта в процессе добычи нефти. По счастливому совпадению, модели этих процессов состоят в описании эволюции области при постоянных моментах Ричадсона t_i с положительными индексами (см. А.Варченко, П.Этингоф "Почему граница круглой капли превращается в инверсный образ эллипса" Москва, Наука-физматлит 1995)