14. Структура когерентных пучков.

Чтобы научиться проверять стабильность расслоений, нам понадобятся некоторые общие сведения о пучках.

Определение. Квазикогерентный пучок T называется *пучком кручения*, если всякое его сечение анулируется (локально) умножением на какую-либо ненулевую функцию.

Пучками кручения являются, например, структурный пучок подсхемы, или прямая сумма всех структурных пучков точек.

Упражнение 14.1. Покажите, что если T — когерентный пучок кручения, то (локально) существует функция, анулирующая любое его сечение.

Пример 14.2. Когерентные пучки на $\mathbb{A}^1$ — это то же самое, что и конечно порожденные $\mathbb{C}[x]$-модули. При этом пучки кручения соответствуют модулям, анулируемым некоторым многочленом, то есть конечномерным модулям. Конечномерный $\mathbb{C}[x]$-модуль — это конечномерное векторное пространство с оператором. По теореме о жордановой нормальной форме он изоморфен прямой сумме модулей вида $\mathbb{C}[x]/(x-\lambda)^n\mathbb{C}[x]$. Значит всякий пучок кручения на $\mathbb{A}^1$ есть прямая сумма пучков $\mathcal{O}/J_P^n$, где J_P — пучок идеалов точки P. Ровно то же утверждение очевидно верно и для $\mathbb{P}^1$ (а на самом деле и для любой кривой).

Определение. Квазикогерентный пучок F называется *пучком без кручения*, если он не содержит подпучков, являющихся пучками кручения.

Упражнение 14.3. Покажите, что **(1)** локально свободный пучок не имеет кручения; **(2)** пучок $\mathcal{K}$, такой что $\mathcal{K}(U)$ — поле рациональных функций на U, квазикогерентен и не имеет кручения; **(3)** если $F \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{K} = 0$, то F — пучок кручения; **(4)** функтор $F \mapsto F \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{K}$ точен.

Упражнение 14.4. Покажите, что **(1)** прямая сумма пучков (без) кручения — пучок (без) кручения; **(2)** расширение пучков (без) кручения — пучок (без) кручения; **(3)** факторпучок пучка кручения — пучок кручения; **(4)** подпучок пучка без кручения не имеет кручения; **(5)** если T — пучок кручения, а F — пучок без кручения, то $\mathrm{Hom}(T,F) = 0$.

Лемма 14.5. *Пусть E — когерентный пучок. Найдется единственный подпучок кручения $T_E \subset E$, т.ч. факторпучок $F_E = E/T_E$ — пучок без кручения. Точная последовательность $0 \to T_E \to E \to F_E \to 0$ функториальна.*

Доказательство: Вложение $\mathcal{O} \subset \mathcal{K}$ индуцирует морфизм $\varphi_E : E \to E \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{K}$. Положим $T_E = \operatorname{Ker} \varphi_E$, $F_E = \operatorname{Im} \varphi_E$. Легко видеть, что T_E — пучок кручения (если $s \in \Gamma(U,E)$ и $s \otimes 1 = 0$ в $E \otimes \mathcal{K}$, то $s \cdot f = 0$ для какой-то $f \in \Gamma(U,\mathcal{O})$). С другой стороны, F_E — подпучок в $E \otimes \mathcal{K}$, но легко видеть, что $E \otimes \mathcal{K} \cong \mathcal{K}^{\oplus r(E)}$, поэтому $E \otimes \mathcal{K}$ — пучок без кручения, а значит и F_E также. Пусть теперь $0 \to T' \to E \to F' \to 0$ какая-либо точная последовательность, в которой T' — пучок кручения, а F' — пучок без кручения. Заметим, что по Упр. 14.4 (5) композиция $T' \to E \to F_E$ — нулевая, поэтому вложение $T' \to E$ пропускается через $T' \to T_E$. Аналогично, вложение $T_E \to E$ пропускается через $T_E \to T'$. Значит $T' = T_E$ и $F' = F_E$. $\square$

Чуть позже мы покажем, что на кривой всякий пучок есть сумма пучка кручения и пучка без кручения. Вообще же это не так.

Упражнение 14.6. Покажите, что если E — пучок на $\mathbb{P}^2$, являющийся нетривиальным расширением $0 \to i_*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-2) \to E \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2} \to 0$, то $E \not\cong T_E \oplus F_E$.

Пусть E — когерентный пучок. Напомним обозначение $E^* = \mathcal{H}om(E, \mathcal{O})$.

Упражнение 14.7. Покажите, что для любого E пучок E^* — без кручения.

Лемма 14.8. *Функтор $\mathcal{H}om$ коммутирует с функтором $E \mapsto E \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{K}$, то есть $\mathcal{H}om(E,F) \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{K} \cong \mathcal{H}om_{\mathcal{K}}(E \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{K}, F \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{K})$.*

Доказательство: воспользуемся изоморфизмами $\mathcal{H}om_{\mathcal{K}}(E \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{K}, F \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{K}) \cong \mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(E, \mathcal{H}om_{\mathcal{K}}(\mathcal{K}, F \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{K})) = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(E, F \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{K})$. Остается доказать, что $\mathcal{H}om(E,F) \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{K} \cong \mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(E, F \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{K})$. Пусть $\phi \in \mathcal{H}om(E,F)$, $f \in \mathcal{K}$. Сопоставим элементу $\phi \otimes f \in \mathcal{H}om(E,F) \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{K}$ морфизм $f\phi : E \to F \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{K}$, $f\phi(e) := \phi(e) \otimes f$. Проверим, что это изоморфизм.

Пусть $\sum \phi_i \otimes f_i$ переходит в ноль. Приводя f_i к общему знаменателю и перенося числитель налево, видим, что $\sum \phi_i \otimes f_i = \phi \otimes (1/a)$, причем $(1/a)\phi = 0$. Но тогда $\phi = a \cdot (1/a)\phi = 0$, значит $\phi \otimes 1/a = 0$.

Возьмем теперь произвольный $\psi : E \to F \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{K}$. Так как E когерентен, локально существует конечное число образующих $e_1, \ldots, e_n$. Пусть a — общий знаменатель для $\psi(e_1), \ldots, \psi(e_n)$. Тогда $a\psi(e_i) \in F$, значит $\phi := a\psi : E \to F$. При этом $\phi \otimes (1/a)$ переходит в ψ. $\square$

Определим морфизм пучков $\mu_E : E \to E^{**}$ следующим образом: если U — аффинное открытое множество и $s \in \Gamma(U,E)$, то $\mu(s) : \Gamma(U,E^*) \to \Gamma(U,\mathcal{O})$, $f \in \Gamma(U,E^*) = \mathrm{Hom}(\Gamma(U,E), \Gamma(U,\mathcal{O})) \mapsto f(s) \in \Gamma(U,\mathcal{O})$. Заметим, что μ_E — морфизм функторов: если $f : E \to F$, то $\mu_F \circ f = f^{**} \circ \mu_E$.

Определение. Пучок E — рефлексивный, если $\mu_E : E \to E^{**}$ — изоморфизм.

Упражнение 14.9. Проверьте, что локально свободные пучки рефлексивны.

Лемма 14.10. *Если E когерентен, то $\mathrm{Ker}\, \mu_E$ и $\mathrm{Coker}\, \mu_E$ — пучки кручения.*

Доказательство: В силу леммы 14.8 имеем $E^{**} \otimes \mathcal{K} \cong (E \otimes \mathcal{K})^{**} \cong E \otimes \mathcal{K}$. Поэтому, по Упр. 14.3 (4) имеем $\mathrm{Ker}\, \mu_E \otimes \mathcal{K} = \mathrm{Coker}\, \mu_E \otimes \mathcal{K} = 0$, и остается использовать Упр. 14.3 (3). $\square$

Упражнение 14.11. Докажите, что $\mathrm{Ker}\, \mu_E = T_E$, $\mathrm{Im}\, \mu_E = F_E$.

Лемма 14.12. *Для любого пучка F пучок F^* рефлексивен.*

Доказательство: Рассмотрим морфизм $\mu_{F^*} : F^* \to F^{***}$, а также морфизм $\mu_F^* : F^{***} \to F^*$, сопряженный к морфизму $\mu_F : F \to F^{**}$. Проверим, что они взаимно обратны. Вопрос локален, поэтому можно считать, что F — факторпучок свободного пучка $\mathcal{O}^n$. Пусть $f : \mathcal{O}^n \to F$ — сюръекция. Тогда $f^* : F^* \to \mathcal{O}^n$ — вложение. Рассмотрим также морфизмы $f^{**} : \mathcal{O}^n \to F^{**}$ и $f^{***} : F^{***} \to \mathcal{O}^n$. Ввиду функториальности имеем коммутативные диаграммы (третья получается из второй сопряжением)

$$\begin{tikzcd} F^* \arrow[r, "f^*"] \arrow[d, "\mu_{F^*}"] & \mathcal{O}^n \arrow[d, "\mathrm{id}"] \\ F^{***} \arrow[r, "f^{***}"] & \mathcal{O}^n \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathcal{O}^n \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] & F \arrow[d, "\mu_F"] \\ \mathcal{O}^n \arrow[r, "f^{**}"] & F^{**} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} F^* \arrow[r, "f^*"] & \mathcal{O}^n \\ F^{***} \arrow[r, "f^{***}"] \arrow[u, "\mu_F^*"] & \mathcal{O}^n \arrow[u, "\mathrm{id}"'] \end{tikzcd}$$

Значит $f^* \circ \mu_F^* \circ \mu_{F^*} = \mathrm{id} \circ f^{***} \circ \mu_{F^*} = \mathrm{id} \circ f^* \circ \mathrm{id} = f^*$. Но f^* — вложение, поэтому $\mu_F^* \circ \mu_{F^*} = \mathrm{id}_{F^*}$ и, значит, $F^{***} = F^* \oplus \mathrm{Coker}\,\mu_{F^*}$. Но $\mathrm{Coker}\,\mu_{F^*}$ — пучок кручения по лемме 14.10, а F^{***} не имеет кручения по лемме 14.7, поэтому $\mathrm{Coker}\,\mu_{F^*} = 0$ и $F^{***} = F^*$. $\square$

Упражнение 14.13. Докажите, что когерентный пучок E не имеет кручения $\Longleftrightarrow$ E есть подпучок локально свободного пучка.

Теорема 14.14. *Если E — рефлексивный пучок ранга 1, то E — локально свободен.*

Эту важную теорему мы оставляем без доказательства.

Упражнение 14.15. Докажите, что если E — пучок без кручения ранга 1, то $E \cong L \otimes J$, где L — линейное расслоение, а $J \subset \mathcal{O}$ — пучок идеалов.

Теперь поговорим о гомологических свойствах пучков.

Лемма 14.16. *Всякий пучок на гладком n-мерном многообразии X локально имеет резольвенту из локально свободных пучков длины $\le n$.*

Доказательство: Рассмотрим произведение $X \times X$ и диагональ $\Delta(X) \subset X \times X$. Так как X гладко, уменьшая X можно считать, что X — аффинно и $\Delta(X) = \{f_1 = \cdots = f_n = 0\}$, где f_i — регулярные функции на X. Значит комплекс Кошуля

$$0 \to \mathcal{O}_{X\times X} \to \cdots \to \mathcal{O}_{X\times X}^{\oplus\binom{n}{2}} \to \mathcal{O}_{X\times X}^{\oplus n} \to \mathcal{O}_{X\times X} \to \Delta_*\mathcal{O}_X \to 0$$

является резольвентой пучка $\Delta_*\mathcal{O}_X$. Пусть теперь $\mathcal{F}$ — пучок на X. Обозначим через p и q проекции $X \times X \to X$. Домножим комплекс Кошуля на $p^*\mathcal{F}$. Так как $p^*\mathcal{F} \otimes \Delta_*\mathcal{O}_X \cong \Delta_*(\Delta^* p^*\mathcal{F})$. Но $p \circ \Delta = \mathrm{id}_X$, поэтому это равно $\Delta^* p^* \mathcal{F} \cong \mathcal{F}$. Получаем точную последовательность

$$0 \to p^*\mathcal{F} \to \cdots \to p^*\mathcal{F}^{\oplus\binom{n}{2}} \to p^*\mathcal{F}^{\oplus n} \to p^*\mathcal{F} \to \Delta_*\mathcal{F} \to 0$$

Применим теперь функтор q_*. Так как $q \circ \Delta = \mathrm{id}_X$, то $q_*\Delta_*\mathcal{F} \cong \mathcal{F}$ и получается точная последовательность

$$0 \to q_*p^*\mathcal{F} \to \cdots \to q_*p^*\mathcal{F}^{\oplus\binom{n}{2}} \to q_*p^*\mathcal{F}^{\oplus n} \to q_*p^*\mathcal{F} \to \mathcal{F} \to 0$$

Наконец, по теореме о плоской замене базы $q_*p^*\mathcal{F} \cong H^0(X, \mathcal{F}) \otimes \mathcal{O}_X$, поэтому это — локально свободная резольвента длины n. $\square$

Следствие 14.17. *Если X — гладко, $\dim X = n$, то $\mathcal{E}xt^{>n}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = 0$.*

Доказательство: используем для вычисления $\mathcal{E}xt$ локальную свободную резольвенту длины n пучка $\mathcal{F}$. $\square$

Лемма 14.18. *Пусть X — гладко и проективно, и $\mathcal{E}xt^i(\mathcal{F}, \mathcal{O}_X) = 0$ при $i > m$. Тогда $\mathcal{F}$ имеет локально свободную резольвенту длины m.*

Доказательство: Индукция по m. База — $m = 0$ нам известна. Пусть теперь $m > 0$. Рассмотрим сюръекцию $\mathcal{O}_X(-N)^{\oplus k} \to \mathcal{F}$ и пусть $\mathcal{F}'$ — ее ядро. Тогда из т.п. $\mathcal{E}xt$ получаем $\mathcal{E}xt^i(\mathcal{F}', \mathcal{O}_X) = \mathcal{E}xt^{i+1}(\mathcal{F}, \mathcal{O}_X)$ при $i > m - 1$, значит по предположению индукции $\mathcal{F}'$ имеет резольвенту длины $m - 1$, а стало быть $\mathcal{F}$ имеет резольвенту длины m. $\square$

Упражнение 14.19. Если X — гладко и проективно, $\dim X = n$, то всякий пучок на X имеет локально свободную резольвенту длины n.

Лемма 14.20. *Для всех $i > 0$ пучок $\mathcal{E}xt^i(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ — пучок кручения.*

Доказательство: лемма 14.8 дает $\mathcal{E}xt^i(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \otimes \mathcal{K} \cong \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{K}}(\mathcal{F} \otimes \mathcal{K}, \mathcal{G} \otimes \mathcal{K}) = 0$, так как $\mathcal{K}$ — поле. Остается применить Упр. 14.3 (3). □

Пусть $\mathcal{F}$ — когерентный пучок на гладком многообразии X. Рассмотрим $\mathrm{supp}\, \mathcal{E}xt^i(\mathcal{F}, \mathcal{O}_X)$. По предыдущей лемме это замкнутое (по Зарискому) собственное (при $i > 0$) подмножество. Обозначим

$$S_m(\mathcal{F}) = \cup_{i=n-m}^{n} \mathrm{supp}\, \mathcal{E}xt^i(\mathcal{F}, \mathcal{O}_X), \quad (m \leq n-1); \qquad S(\mathcal{F}) = S_{n-1}(\mathcal{F}).$$

Это замкнутые собственные подмножества в X.

Лемма 14.21. *Пучок $\mathcal{F}$ локально свободен на $X \setminus S(\mathcal{F})$.*

Доказательство: так как $\mathcal{E}xt^i$ коммутируют с ограничениями на открытые подмножества, на $X \setminus S(\mathcal{F})$ имеем $\mathcal{E}xt^{>0}(\mathcal{F}, \mathcal{O}) = 0$. □

Множество $S(\mathcal{F})$ называется *множеством особенностей* пучка $\mathcal{F}$, а множество $S_m(\mathcal{F})$ — его *m-ым множеством особенностей.*

Упражнение 14.22. Покажите, что на $X \setminus S_m(\mathcal{F})$ пучок $\mathcal{F}$ имеет локально свободную резольвенту длины $n - m$.

Теорема 14.23. *Если X гладко, $\dim X = n$, то $\dim S_m(\mathcal{F}) \leq m$.*

Доказательство: X можно считать аффинным. Пусть Z — неприводимая компонента в $\mathrm{supp}\, \mathcal{E}xt^i(\mathcal{F}, \mathcal{G})$, $\dim Z = d$. Уменьшив X, можно найти гладкое отображение $f : X \to \mathbb{A}^d$, такое что $f_{|Z} : Z \to \mathbb{A}^d$ является накрытием (гладкость означает, что df везде сюръективно). Покажем, что всякий пучок $\mathcal{F}$ на X локально имеет резольвенту длины $n - d$ пучками вида $f^*\mathcal{M}$. Доказательство такое же, как и у леммы 14.16, только вместо произведения $X \times X$ надо рассмотреть расслоенное произведение $X \times_{\mathbb{A}^d} X$, а теорема о плоской замене базы примет вид $q_* p^* \mathcal{F} \cong f^* f_* \mathcal{F}$. Итак, выберем резольвенту

$$0 \to f^*\mathcal{M}_{n-d} \to \cdots \to f^*\mathcal{M}_1 \to f^*\mathcal{M}_0 \to \mathcal{F} \to 0.$$

Выберем теперь открытое подмножество $U \subset \mathbb{A}^d$, такое что все пучки $\mathcal{M}_i$ локально свободны на U. Тогда $f^*\mathcal{M}_i$ локально свободны на $f^{-1}(U)$, значит на $f^{-1}(U)$ имеем $\mathcal{E}xt^{>n-d}(\mathcal{F}, \mathcal{O}) = 0$. Но так как $f : Z \to \mathbb{A}^d$ — накрытие, то $Z \cap f^{-1}(U) \neq \emptyset$, значит $i \leq n - d$. Отсюда получаем $d \leq n - i$, то есть $\dim \mathrm{supp}\, \mathcal{E}xt^i(\mathcal{F}, \mathcal{O}_X) \leq n - i$. □

Определение. Пучок $\mathcal{F}$ называется *пучком k-ых сизигий*, если существует точная последовательность $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{E}_1 \to \mathcal{E}_2 \to \cdots \to \mathcal{E}_k$, в которой все $\mathcal{E}_i$ локально свободны.

Упражнение 14.24. Покажите, что пучок без кручения является пучком первых сизигий.

Лемма 14.25. *Пусть $\mathcal{F}$ — пучок k-ых сизигий. Тогда $\dim S_m(\mathcal{F}) \leq m - k$.*

Доказательство: индукция по k. База — $k = 0$ нам известна. Пусть теперь $k > 0$. Пусть $\mathcal{F}' = \mathrm{Coker}(\mathcal{F} \to \mathcal{E}_1)$. Тогда $\mathcal{E}xt^i(\mathcal{F}, \mathcal{O}) = \mathcal{E}xt^{i+1}(\mathcal{F}', \mathcal{O})$, поэтому $S_m(\mathcal{F}) = S_{m-1}(\mathcal{F}')$. Но $\mathcal{F}'$ — пучок $(k-1)$-ых сизигий, поэтому по предположению индукции $\dim S_{m-1}(\mathcal{F}') \le (m-1) - (k-1) = m - k$. $\square$

Следствие 14.26. *Если F — пучок без кручения на X, то $\operatorname{codim} S(F) \ge 2$. В частности, если X — кривая, то F локально свободен.*

Упражнение 14.27. Пусть X — кривая, а E — пучок на X. Покажите, что **(1)** существует единственная т.п. $0 \to T \to E \to F \to 0$, такая что T — пучок кручения, а F — локально свободен; **(2)** $\mathcal{H}om(F, T) \cong T^{\oplus r(F)}$, $\mathcal{E}xt^{>0}(F, T) = 0$; **(3)** $\mathrm{Ext}^{>0}(F, T) = 0$; **(4)** $E \cong F \oplus T$.

Приведем пример не локально свободного пучка без кручения на $\mathbb{P}^2$. Выберем точку $P \in \mathbb{P}^3$ и пусть $E = J_P$. Применим функтор $\mathcal{H}om(-, \mathcal{O})$ к точной последовательности $0 \to J_P \to \mathcal{O} \to \mathcal{O}_P \to 0$. Получим точную последовательность $0 \to 0 \to \mathcal{O} \to (J_P)^* \to 0 \to 0 \to \mathcal{E}xt^1(J_P, \mathcal{O}) \to \mathcal{O}_P \to 0$. Значит $(J_P)^* \cong \mathcal{O}$ и $\mathcal{E}xt^1(J_P, \mathcal{O}) \cong \mathcal{O}_P$, то есть J_P не локально свободен.

Лемма 14.28. *Пучок E рефлексивен $\iff$ E — пучок вторых сизигий.*

Доказательство: ($\Longrightarrow$) Выберем для пучка E^* локально свободную резольвенту $\mathcal{E}_1 \to \mathcal{E}_0 \to E^* \to 0$ и применим двойственность. Получим резольвенту $0 \to E^{**} \to \mathcal{E}_0^* \to \mathcal{E}_1^*$. Но $E \cong E^{**}$, значит E — пучок вторых сизигий.

($\Longleftarrow$) Выберем точную последовательность $0 \to E \to \mathcal{E}_1 \to \mathcal{E}_2$ и дважды дуализируем. Получим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & E \arrow[r] \arrow[d, "\mu_E"'] & \mathcal{E}_1 \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & \mathcal{E}_2 \arrow[d, "\cong"'] \\ & E^{**} \arrow[r] & \mathcal{E}_1^{**} \arrow[r] & \mathcal{E}_2^{**} \end{tikzcd}$$

Заметим, что вне множества $S(E)$ морфизм μ_E — изоморфизм, поэтому пучок $\mathrm{Ker}(E^{**} \to \mathcal{E}_1^{**})$ — пучок кручения. Но E^{**} не имеет кручения, значит нижняя строчка точна в E^{**}. По лемме о пяти гомоморфизмах $E \cong E^{**}$. $\square$

Следствие 14.29. *Если F — рефлексивный пучок на X, то $\operatorname{codim} S(F) \ge 3$. В частности, если X — кривая или поверхность, то F локально свободен.*

Упражнение 14.30. Пусть E — пучок без кручения на поверхности X с $\mathrm{c}_1(E) = 0$. Тогда $E \cong J_Z$, где $Z \subset X$ — нульмерная подсхема.

Приведем пример рефлексивного, но не локально свободного пучка на $\mathbb{P}^3$. Выберем точку $P \in \mathbb{P}^3$ и рассмотрим комплекс Кошуля

$$0 \to \mathcal{O}(-3) \xrightarrow{A} \mathcal{O}(-2)^{\oplus 3} \to \mathcal{O}(-1)^{\oplus 3} \xrightarrow{B} \mathcal{O} \to \mathcal{O}_P \to 0.$$

Пусть $E = \mathrm{Coker}\, A = \mathrm{Ker}\, B$. По построению E — пучок вторых сизигий, стало быть рефлексивен. Применим функтор $\mathcal{H}om(-, \mathcal{O})$ к точной последовательности $0 \to \mathcal{O}(-3) \xrightarrow{A} \mathcal{O}(-2)^{\oplus 3} \to E \to 0$. Получим точную последовательность $0 \to E^* \to \mathcal{O}(2)^{\oplus 3} \xrightarrow{A^*} \mathcal{O}(3) \to \mathcal{E}xt^1(E, \mathcal{O}) \to 0$. Легко видеть, что $A^* = B$, поэтому $\mathcal{E}xt^1(E, \mathcal{O}) \cong \mathcal{O}_P(3) \cong \mathcal{O}_P$, значит E не локально свободен.