12. Классификация расслоений.

Общий подход к классификационным задачам состоит в следующем. Сначала выделяются дискретные инварианты классифицируемых объектов, а затем изучаются семейства объектов с фиксированными дискретными инвариантами. Следуя этому, мы будем изучать сегодня дискретные инварианты алгебраических векторных расслоений на проективных пространствах.

12.1. **Условия Шварценбергера.** Наиболее очевидными дискретными инвариантами векторного расслоения E на проеткивном пространстве $\mathbb{P}^n$ является ранг $r(E) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ и классы Чженя $\mathrm{c}_i(E) \in \mathrm{H}^{2i}(\mathbb{P}^n, \mathbb{Z})$ $(1 \leq i \leq r(E))$. Пользуясь отождествлением $\mathrm{H}^{2i}(\mathbb{P}^n, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}\,\mathrm{h}^i \cong \mathbb{Z}$ мы можем рассматривать классы Чженя как целые числа. Возникает вопрос, для всякого ли r и набора целых чисел $(\mathrm{c}_1, \ldots, \mathrm{c}_r) \in \mathbb{Z}^r$ найдется расслоение E ранга r с $\mathrm{c}_i(E) = \mathrm{c}_i$. Необходимое условие дает следующая теорема.

Теорема 12.1. *Пусть E — векторное расслоение ранга r на $\mathbb{P}^n$. Пусть числа $x_1, \ldots, x_r \in \mathbb{C}$ определяются из следующего равенства*

$$1 + \mathrm{c}_1(E)t + \cdots + \mathrm{c}_r(E)t^r = \prod_{i=1}^{r}(1 + x_i t).$$

Тогда выполнено условие

$$\sum_{i=1}^{r} \binom{n + x_i + s}{n} \in \mathbb{Z} \qquad \forall s \in \mathbb{Z}, \tag{12.2}$$

где $\displaystyle\binom{z}{n} = z(z-1)\ldots(z-n+1)/n!$ *для любого* $z \in \mathbb{C}$.

Условие (12.2) называется условием Шварценбергера S_n^r.

Упражнение 12.3. Покажите, что

- условие S_n^1 выполено для любого $\mathrm{c}_1 \in \mathbb{Z}$;
- условие S_1^r выполено для любого $\mathrm{c}_1 \in \mathbb{Z}$;
- условие S_2^2 выполено для любых $\mathrm{c}_1, \mathrm{c}_2 \in \mathbb{Z}$;
- условие S_3^2 равносильно условию $\mathrm{c}_1\mathrm{c}_2 \equiv 0 \pmod 2$;
- условие S_3^3 равносильно условию $\mathrm{c}_1\mathrm{c}_2 \equiv \mathrm{c}_3 \pmod 2$;
- условие S_4^2 равносильно условию $\mathrm{c}_2(\mathrm{c}_2 + 1 - 3\,\mathrm{c}_1 - 2\,\mathrm{c}_1^2) \equiv 0 \pmod{12}$.

Прежде чем доказать теорему 12.1 проверим несколько полезных фактов. Обозначим левую часть равенства (12.2) через $S(E, s)$.

Упражнение 12.4. **(1)** Покажите, что $\mathrm{ch}_p(E) = (x_1^p + \cdots + x_r^p)/p!$. **(2)** Проверьте, что $S(E, s) = \sum_{p=0}^{n} a_p(s)\,\mathrm{ch}_p(E)$, где $a_p(s)$ — многочлен от s с рациональными коэффициентами, не зависящий от расслоения E. **(3)** Покажите, что $S(E, s) = S(E(s), 0)$.

На самом деле, теорема 12.1 является следствием теоремы Римана-Роха для проективного пространства. Определим эйлерову характеристику пучка E равенством

$$\chi(E) = \sum_{p=0}^{n}(-1)^p \dim \mathrm{H}^p(\mathbb{P}^n, E).$$

Упражнение 12.5. **(1)** Проверьте, что $\chi(E)$ аддитивна относительно прямых сумм. **(2)** Проверьте, что $\chi(E)$ аддитивна относительно точных последовательностей.

Теорема 12.6 (Теорема Римана-Роха). *Пусть E — расслоение ранга r на $\mathbb{P}^n$. Тогда $\chi(E) = S(E,0)$.*

Доказательство: Сначала докажем теорему для линейных расслоений. Как известно, всякое линейное расслоение на $\mathbb{P}^n$ имеет вид $\mathcal{O}(k)$. Далее из теоремы Ботта следует

$$\sum_{p=0}^{n}(-1)^p \dim \mathrm{H}^p(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(k)) = \begin{cases} \dim \mathbf{S}^k \mathbb{C}^{n+1}, & \text{при } k \geq 0 \\ 0, & \text{при } -n \leq k \leq -1 \\ (-1)^n \dim \mathbf{S}^{-k-n-1}\mathbb{C}^{n+1}, & \text{при } k \leq -n-1 \end{cases}$$

Остается заметить, что во всех случаях это равно $\binom{n+k}{n} = S(\mathcal{O}(k),0)$. Значит $\chi(E) = S(E,0)$ для любых линейных расслоений.

Заметим далее, что из Упр. 12.4 (2) следует, что $S(E,0) = \sum_{p=0}^{n} a_p(0)\,\mathrm{ch}_p(E)$, значит $S(E,0)$ аддитивно относительно прямых сумм расслоений. С другой стороны, по Упр. 12.5 (1) эйлерова характеристика $\chi(E)$ тоже аддитивна относительно прямых сумм, следовательно $\chi(E) = S(E,0)$ для прямых сумм линейных расслоений.

Далее, так как характер Чженя аддитивен в точных последовательностях, то из Упр. 12.4 (2) следует, что $S(E,0)$ аддитивно в точных последовательностях. С другой стороны, по Упр. 12.5 (2) эйлерова характеристика $\chi(E)$ тоже аддитивна в точных последовательностей, следовательно $\chi(E) = S(E,0)$ для любого расслоения, допускающего резольвенту из прямых сумм линейных расслоений.

Впоследствии мы покажем, что всякое расслоение на проективном пространстве допускает такую резольвенту. Значит, по модулю этого утверждения теорема Римана-Роха доказана. □

Доказательство теоремы 12.1: Из Упр. 12.4 (3) и теоремы Римана-Роха следует

$$S(E,s) = S(E(s),0) = \chi(E(s)) \in \mathbb{Z}$$

для любого $s \in \mathbb{Z}$. □

Замечание. Теорему Римана-Роха можно сформулировать для любого связного гладкого проективного многообразия X и любого когерентного пучка E на многообразии X. В такой формулировке она называется теоремой Римана-Роха-Хирцебруха и гласит

$$\chi(E) = \deg(\mathrm{ch}(E) \cdot \mathrm{td}(T_X)),$$

где $\chi(E) = \sum_{p=0}^{\dim X}(-1)^p \dim \mathrm{H}^p(X,E)$, $\mathrm{td}(T_X)$ обозначает класс Тодда касательного расслоения T_X, определяемый равенством

$$\mathrm{td}(T_X) = \prod_{i=1}^{\dim X} \frac{\mathrm{x}_i(T_X)}{1 - e^{-\mathrm{x}_i(T_X)}},$$

а deg обозначает проекцию $\mathrm{H}^\bullet(X,\mathbb{Z}) \to \mathrm{H}^{2\dim X}(X,\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$.

12.2. **Топологическая классификация расслоений.** Определеним непрерывное векторное расслоение на многообразии X аналогично тому, как мы определяли алгебраическое векторное расслоение, заменив топологию Зарисского аналитической топологией и ослабив условие алегбраичности отображений π_E, g_{xy} до условия их непрерывности. Аналогично определим понятие непрерывного сечения, гомоморфизма и изоморфизма расслоений.

Упражнение 12.7. **(1)** Покажите, что категория непрерывных векторных расслоений полупроста, то есть для всякой точной последовательности непрерывных расслоений $0 \to E_1 \to E_2 \to E_3 \to 0$ имеем $E_2 \cong E_1 \oplus E_3$. **(2)** Проверьте, что классы Чженя определены в категории непрерывных расслоений.

Вопрос о дискретных инвариантах алгебраических расслоений сводится к классификации непрерывных векторных расслоений. Действительно, сопоставляя всякому алгебраическому расслоению его класс изоморфизма в категории непрерывных расслоений мы получаем дискретный инвариант. К сожалению задача о классификации непрерывных расслоений полностью не решена, однако некоторая информация об этом имеется.

Во-первых, можно доказать, что для непрерывных расслоений выполнены условия Шварценбергера (в отличии от теоремы Римана-Роха, которая для непрерывных расслоений не имеет смысла). Далее рассмотрим несколько случаев.

$(\mathbf{r} > \mathbf{n})$ Легко показать, что непрерывные расслоения всегда порождаются глобальными сечениями. В силу леммы 9.11 отсюда слудует, что всякое непрерывное расслоение E ранга $r > n$ содержит тривиальное подрасслоение ранга $r-n$, откуда в силу полупростоты категории непрерывных расслоений заключаем, что $E \cong \mathcal{O}_{\mathrm{cont}}^{r-n} \oplus E'$, где E' — непрерывное расслоение ранга n, а $\mathcal{O}_{\mathrm{cont}}^{r-n}$ — тривиальное расслоение ранга $r-n$. Ясно, что при этом $\mathrm{c}(E) = \mathrm{c}(E')$. Тем самым задача о классификации расслоений ранга $r > n$ сводится к задаче о классификации расслоений ранга n.

$(\mathbf{r} = \mathbf{n})$ В этом случае полная классификация дается теоремой Томаса.

Теорема 12.8 (Томас). *Для любого набора чисел* $(\mathrm{c}_1, \dots, \mathrm{c}_n) \in \mathbb{Z}^n$, *удовлетворяющего условию Шварценбергера* S_n^n *существует едиственное с точностью до непрерывного изоморфизма расслоение* E *на* $\mathbb{P}^n$, *такое что* $\mathrm{c}_i(E) = \mathrm{c}_i$.

$(\mathbf{r} = \mathbf{1})$ В этом случае условия Шварценбергера не накладывают никаких ограничений на значение $\mathrm{c}_1(E)$. На самом деле, можно показать что для любого $\mathrm{c}_1 \in \mathbb{Z}$ существует едиственное с точностью до непрерывного изоморфизма расслоение E ранга 1 на $\mathbb{P}^n$, такое что $\mathrm{c}_1(E) = \mathrm{c}_1$.

$(\mathbf{r} = \mathbf{2},\ \mathbf{n} = \mathbf{3})$ Условие Шварценбергера S_3^2 равносильно условию $\mathrm{c}_1\mathrm{c}_2 \equiv 0 \pmod 2$. По теореме Атьи-Риса для любых $(\mathrm{c}_1, \mathrm{c}_2) \in \mathbb{Z}^2$, удовлетворяющих этому условию существует непрерывное расслоение E ранга 2 на $\mathbb{P}^3$, такое что $\mathrm{c}_i(E) = \mathrm{c}_i$. Более того, при нечетном c_1 такое расслоение едиственно с точностью до непрерывного изоморфизма, а при четном c_1 существует ровно 2 таких расслоения. Эти расслоения различаются с помощью так называемого альфа-инварианта $\alpha(E) \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Для алгебраических расслоений альфа-инвариант можно вычислить как “половину” эйлеровой характеристики

$$\alpha(E) = \dim \mathrm{H}^0(\mathbb{P}^3, E(-k-2)) - \dim \mathrm{H}^1(\mathbb{P}^3, E(-k-2)), \tag{12.9}$$

где $k = \mathrm{c}_1(E)/2$.

12.3. Алгебраические структуры на непрерывных расслоениях. Следующий вопрос — это наличие алгебраических расслоений в данном классе изоморфизма непрерывных расслоений или другими словами, возможность введения алгебраической структуры на данном непрерывном расслоении. Разберем ситуацию в случае $\mathbb{P}^1$, $\mathbb{P}^2$ и $\mathbb{P}^3$.

($\mathbb{P}^\mathbf{1}$) Согласно предыдущему разделу классы изоморфизма непрерывных расслоений на $\mathbb{P}^1$ нумеруются парами (r, c_1), где $r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ и $\mathrm{c}_1 \in \mathbb{Z}$. Ясно, что расслоение $\mathcal{O}^{r-1} \oplus \mathcal{O}(\mathrm{c}_1)$ является алгебраическим расслоением, лежащем в соответствующем классе изоморфизма. Тем самым всякое непрерывное расслоение на $\mathbb{P}^1$ допускает алгебраическую структуру.

($\mathbb{P}^\mathbf{2}$) В случае $r = 1$ ситуация аналогична предыдущему пункту. Классы изоморфизма непрерывных расслоений ранга 1 на $\mathbb{P}^2$ нумеруются числами $\mathrm{c}_1 \in \mathbb{Z}$. Ясно, что расслоение $\mathcal{O}(\mathrm{c}_1)$ является алгебраическим расслоением, лежащем в соответствующем классе изоморфизма.

В случае $r = 2$ классы изоморфизма непрерывных расслоений ранга 2 на $\mathbb{P}^2$ нумеруются парами $(\mathrm{c}_1, \mathrm{c}_2)$, где $\mathrm{c}_1, \mathrm{c}_2 \in \mathbb{Z}$. Покажем, что всякое такое расслоение допускает алгебраическую структуру. Возьмем произвольные $(\mathrm{c}_1, \mathrm{c}_2)$ и положим $\Delta = \mathrm{c}_1^2 - 4\,\mathrm{c}_2$. Выберем теперь $k \in \mathbb{Z}$ так, чтобы

$$k \leq 2, \quad k^2 \geq \Delta \quad \text{и} \quad k \equiv \mathrm{c}_1 \pmod 2.$$

Тогда $\Delta = k^2 - 4m$, где $m \in \mathbb{Z}$ и $m \geq 0$. Рассмотрим теперь расслоение $F_{\mathrm{c}_1,\mathrm{c}_2} = E\left(\dfrac{\mathrm{c}_1 - k}{2}\right)$, где E — расслоение, получающееся применением конструкции Серра к набору m точек $Y = \{x_1, \dots, x_m\}$ и изоморфизму $\mathcal{N}_{Y/\mathbb{P}^2} \cong \mathcal{O}(k)_{|Y}$ (см. 11.11(1)). Легко показать, что $\mathrm{c}_i(F_{\mathrm{c}_1,\mathrm{c}_2}) = \mathrm{c}_i$, что и требовалось.

Наконец, в случае $r > 2$ при произвольных $\mathrm{c}_1, \mathrm{c}_2 \in \mathbb{Z}$ расслоение $\mathcal{O}^{r-2} \oplus F_{\mathrm{c}_1,\mathrm{c}_2}$ имеет классы Чженя c_1 и c_2. Таким образом, иы доказали

Теорема 12.10 (Шварценбергер). *Всякое непрерывное расслоение на $\mathbb{P}^2$ допускает алгебраическую структуру.*

($\mathbb{P}^\mathbf{3}$) В случае $r = 1$ ситуация аналогична предыдущему пункту. Классы изоморфизма непрерывных расслоений ранга 1 на $\mathbb{P}^3$ нумеруются числами $\mathrm{c}_1 \in \mathbb{Z}$. Ясно, что расслоение $\mathcal{O}(\mathrm{c}_1)$ является алгеброическим расслоением, лежащем в соответствующем классе изоморфизма.

В случае $r = 2$ классы изоморфизма непрерывных расслоений ранга 2 на $\mathbb{P}^3$ нумеруются парами $(\mathrm{c}_1, \mathrm{c}_2)$, где $\mathrm{c}_1, \mathrm{c}_2 \in \mathbb{Z}$, такими что $\mathrm{c}_1\,\mathrm{c}_2 \equiv 0 \pmod 2$ и в случае четного c_1 значением альфа-инварианта. Покажем, что всякое такое расслоение допускает алгебраическую структуру. Рассмотрим для этого расслоение E из примера 11.11(3), то есть расслоение, получающееся применением конструкции Серра к $Y = Y_1 \sqcup \dots \sqcup Y_m$, где Y_i — полное пересечение поверхностей степеней a_i и a'_i, $a_i + a'_i = k$, так что имеем точную последовательность $0 \to \mathcal{O} \to E \to J_Y(k) \to 0$. Легко показать, что $\mathrm{c}_1(E) = k$, $\mathrm{c}_2(E) = \sum_{i=1}^m a_i a'_i$. При четном k надо еще вычислить альфа-инвариант.

Лемма 12.11. *Пусть k — четное положительное число, $m > 0$ и $a_1, \dots, a_m$ — набор целых чисел, таких что $1 \leq a_i \leq k/2$. Пусть $a'_i = k - a_i$, а E —*

расслоение, построенное выше. Тогда

$$\alpha(E) = (m-1)d(k/2-2)+\sum_{i=1}^{m} d(k/2-a_i-2), \text{ где } d(s) = \begin{cases} 1, & \text{при } s = 4t,\ t \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Доказательство: Заметим сначала, что $d(s) = \dim \mathrm{H}^0(\mathbb{P}^3, \mathcal{O}(s)) \bmod 2$. Теперь приступим к вычислениям. Подкручивая на $\mathcal{O}(-k/2-2)$ точную последовательность, определяющую расслоение E, получаем

$$0 \to \mathcal{O}(-k/2-2) \to E(-k/2-2) \to J_Y(k/2-2) \to 0. \qquad (12.12)$$

Кроме того, имеются последовательности

$$0 \to J_Y(k/2-2) \to \mathcal{O}(k/2-2) \to \bigoplus_{i=1}^{m} \mathcal{O}_{Y_i}(k/2-2) \to 0, \qquad (12.13)$$

$$0 \to \mathcal{O}(-k/2-2) \to \mathcal{O}(k/2-a_i-2) \oplus \mathcal{O}(k/2-a_i'-2) \to$$
$$\to \mathcal{O}(k/2-2) \to \mathcal{O}_{Y_i}(k/2-2) \to 0. \qquad (12.14)$$

Пользуясь последовательностью (12.14) легко вычислить $\mathrm{H}^0(\mathbb{P}^3, \mathcal{O}_{Y_i}(k/2-2))$. Для этого заметим, что $(-k/2-2)$ и $(k/2-a_i'-2)$ строго меньше нуля, поэтому они не имеют когомологий в размерностях ≤ 2. Следовательно, их когомологии не оказывают влияния на $\mathrm{H}^0(\mathbb{P}^3, \mathcal{O}_{Y_i}(k/2-2))$ и значит

$$\begin{aligned} &\dim \mathrm{H}^0(\mathbb{P}^3, \mathcal{O}_{Y_i}(k/2-2)) = \\ &\quad = \dim \mathrm{H}^0(\mathbb{P}^3, \mathcal{O}(k/2-2)) - \dim \mathrm{H}^0(\mathbb{P}^3, \mathcal{O}(k/2-a_i-2)) = \\ &\qquad = d(k/2-2) + d(k/2-a_i-2) \bmod 2. \end{aligned}$$

Далее, применяя последовательности (12.12) и (12.13) получаем

$$\begin{aligned} \alpha(E) &= \dim \mathrm{H}^0(\mathbb{P}^3, E(-k/2-2)) + \dim \mathrm{H}^1(\mathbb{P}^3, E(-k/2-2)) = \\ &= \dim \mathrm{H}^0(\mathbb{P}^3, J_Y(k/2-2)) - \dim \mathrm{H}^1(\mathbb{P}^3, J_Y(k/2-2)) = \\ &= \dim \mathrm{H}^0(\mathbb{P}^3, \mathcal{O}(k/2-2)) - \textstyle\sum_{i=1}^m \dim \mathrm{H}^0(\mathbb{P}^3, \mathcal{O}_{Y_i}(k/2-2)) = \\ &= d(k/2-2) - md(k/2-2) - \textstyle\sum_{i=1}^m d(k/2-a_i-2) = \\ &= (m-1)d(k/2-2) + \textstyle\sum_{i=1}^m d(k/2-a_i-2) \bmod 2. \end{aligned}$$

□

Остается заметить, что $\forall c_1, c_2 \in \mathbb{Z}$, т.ч. $c_1 c_2 \equiv 0 \bmod 2$ (а при $c_1 \equiv 0 \bmod 2$ еще и $\forall \alpha \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$) найдутся такие $k \equiv c_1 \bmod 2$ и набор $0 < a_1, \ldots, a_m \leq k/2$, так что $k^2 - 4\sum a_i(k-a_i) = \Delta(c_1, c_2) := c_1^2 - 4c_2$, а если k четно, то еще и $(m-1)d(k/2-2) + \sum_{i=1}^m d(k/2-a_i-2) = \alpha \bmod 2$. Дело это муторное, но никакой науки не требующее.

Теорема 12.15 (Атья–Рис–Хоррокс). *Всякое непрерывное расслоение ранга* 2 *на* $\mathbb{P}^3$ *допускает алгебраическую структуру.*

Аналогично доказывается

Теорема 12.16 (Фогелер). *Всякое непрерывное расслоение ранга* 3 *на* $\mathbb{P}^3$ *допускает алгебраическую структуру.*

Расслоения строятся в виде расширения $0 \to \mathcal{O} \oplus \mathcal{O} \to E \to J_Y(k) \to 0$, где $Y = Y_1 \sqcup \cdots \sqcup Y_m$, Y_i — пересечение поверхностей степеней a_i, a_i' и $a_i + a_i' \geq k$.

Вопрос о существовании алгебраической структуры на непрерывных расслоениях на $\mathbb{P}^n$ при $n \geq 4$ не решен.