Анализ, листок 3 (весна 2007, 2 семестр)

Интегрирование в $\mathbb{R}^n$ и не только

По умолчанию слово «мера» означает «мера Лебега», а через μ обозначается мера Лебега в $\mathbb{R}^n$. Вместо $d\mu$ пишем также что-нибудь наподобие $dx_1 \dots dx_n$.

1. Докажите, что всякое аффинное подпространство в $\mathbb{R}^n$, отличное от самого $\mathbb{R}^n$, имеет меру нуль.

2. Положим

$$X_n = \{(x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant \dots \leqslant x_n \leqslant 1)\}.$$

Найдите $\mu(X_n)$.

3. Пусть $I = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_i \in [0; 1]\}$.

а) Найдите $\int_I \max(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$.

б) Найдите $\int_I \min(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$.

4. а) Пусть $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — линейное преобразование, заданное диагональной матрицей. Докажите, что $\mu(A(E)) = |\det(A)|\mu(E)$ для всякого измеримого множества $E \subset \mathbb{R}^n$.

б) Пусть $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — произвольное невырожденное линейное преобразование. Докажите, что $\mu(A(E)) = |\det(A)|\mu(E)$ для всякого измеримого множества $E \subset \mathbb{R}^n$.

в) То же, что в пункте (б), но преобразование A вырождено.

5. Пусть $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — суммируемая функция; для всякого $x \in \mathbb{R}$ положим $g(x) = \int_{x-1}^{x+1} f(t)dt$.

а) Покажите, что функция $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ суммируема.

б) Пусть $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 1$; что можно сказать про $\int_{\mathbb{R}} g(x)dx$?

6. Пусть $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — суммируемые функции.

а) Покажите, что для всякого $x \in \mathbb{R}$ определено число $(f*g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-t)g(t)dt$.

б) Покажите, что функция $x \mapsto (f * g)(x)$ суммируема.

в) Предположим дополнительно, что функция f принадлежит классу C^1. Покажите, что и $f * g$ принадлежит классу C^1.

7. Пусть $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — функции класса C^1; положим $\varphi(x) = (f(x), g(x))$. Докажите, что множество $\varphi(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^2$ не содержит внутренних точек («гладких кривых Пеано не бывает»).

8. Может ли неотрицательная измеримая и всюду конечная функция на $\mathbb{R}$ иметь бесконечный интеграл по любому отрезку?

9. Покажите, что множество $E \subset \mathbb{R}^n$ имеет лебеговскую меру нуль тогда и только тогда, когда для всякого $\varepsilon > 0$ множество X содержится в не более чем счетном объединении открытых кубов (с ребрами, параллельными координатным осям), сумма мер которых не превосходит ε.