Лекция 19. Теорема об обратной функции

Вся эта лекция будет посвящена доказательству одной теоремы, являющейся одним из основных результатов многомерного анализа. Слова «векторное пространство» будут означать «конечномерное векторное пространство».

Определение 19.1. Пусть $V_1 \subset E_1$ и $V_2 \subset E_2$ — открытые подмножества в когнечномерных векторных пространствах. Отображение $f\colon E_1 \to E_2$ называется *диффеоморфизмом класса* C^r, если оно гомеоморфизмом и при этом f и f^{-1} гладки класса C^r.

Если f — диффеоморфизм, то его производная в любой точке является изоморфизмом (так что, в частности, $m = n$).

Теорема 19.2. *Пусть E и F — конечномерные векторные пространства, $U \subset E$ — открытое подмножество и $f\colon U \to F$ — отображение класса C^r. Предположим, что для некоторой точки $p \in U$ отображение $Df(p)\colon E \to F$ является изоморфизмом. Тогда существует такое содержащее точку p открытое подмножество $U_1 \subset U$, что $f(U_1) \subset F$ — открытое множество и ограничение $f|_{U_1}\colon U_1 \to f(U_1)$ является диффеоморфизмом класса C^r.*

Ясно, что в условиях этой теоремы обязательно будет выполнено равенство $\dim E = \dim F$. Если при некотором выборе базисов в E и F отображение f записывается формулой

$$(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (\varphi_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \varphi_n(x_1, \ldots, x_n)),$$

то $Df(p)$ является изоморфизмом тогда и только тогда, когда определитель

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}(p) & \ldots & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_n}(p) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial\varphi_n}{\partial x_1}(p) & \ldots & \frac{\partial\varphi_n}{\partial x_n}(p) \end{vmatrix}$$

отличен от нуля. Такого рода определители, составленные из частных производных, называются *якобианами*.

Для доказательства теоремы положим $n = \dim E = \dim F$ и выберем на пространствах E и F нормы — для определенности, L^∞-нормы (максимум модулей координат).

Нормой линейного отображения $A\colon E \to F$, где E и F — нормированные векторные пространства, называется число

$$\|A\| = \sup_{v \neq 0} \frac{\|Av\|}{\|v\|} = \sup_{\|v\|=1} \|Av\|.$$

Очевидно, $\|A\| = 0$ тогда и только тогда, когда $A = 0$. Если E и F конечномерны, то $\|A\|$ обязательно конечна (см. следствие 17.2). Функция $A \mapsto \|A\|$ непрерывна на $\mathrm{Hom}(E, F)$ (это следует, например, из очевидного неравенства $\|A+B\| \leqslant \|A\| + \|B\|$, показывающего, что указанная функция является нормой на векторном пространстве $\mathrm{Hom}(E, F)$). Если $A\colon E \to F$ — изоморфизм конечномерных нормированных линейных пространств, то, очевидно, для любых $v, w \in E$ имеют место неравенства

$$\|A^{-1}\|^{-1} \cdot \|v - w\| \leqslant \|Av - Aw\| \leqslant \|A\| \cdot \|v - w\|. \tag{19.1}$$

Нам понадобится следующая оценка.

Лемма 19.3. *В условиях теоремы для всякой точки $a \in U$ и всякого $\varepsilon > 0$ существует окрестность $V \ni a$, обладающая следующим свойством: если $x \in V$, $x + h \in V$ то $\|f(x+h) - f(x) - f'(x) \cdot h\| \leqslant \varepsilon \|h\|$.*

Доказательство. Пусть $f = (f_1, \ldots, f_n)$, где $f_i\colon U \to \mathbb{R}$; применим к каждой из f_i теорему 18.2 при $r = 1$. □

Теперь можно приступить непосредственно к доказательству теоремы об обратной функции.

Лемма 19.4. *Пусть E и F — конечномерные пространства, $U \subset E$ — открытое подмножество, $f\colon U \to F$ — отображение класса C^1. Если $f'(a)$ является изоморфизмом для некоторой точки $a \in U$, то существует такая окрестность $V \ni a$, что $f(p) \neq f(q)$, как только $p, q \in V$ и $p \neq q$.*

Доказательство. Так как f принадлежит классу C^1 и $f'(a)$ является изоморфизмом, существуют окрестность $V_1 \ni a$ и число $M > 0$, обладающие следующим свойством: для всех $b \in V_1$ отображение $f'(b)$ явдляется изоморфизмом и $\|(f'(b))^{-1}\| \leqslant M$. Применяя теперь лемму 19.3 для $\varepsilon = 1/2M$, получим, что у точки a есть окрестность $V \subset V_1$ со следующим свойством: если $x \in V$, $x + h \in V$ то

$$f(x+h) - f(x) = f'(x) \cdot h + R(x, h),$$

где $\|R(x,h)\| \leqslant \|h\|/2M$. Поскольку, ввиду неравенства (19.1), $\|f'(x)h\| \geqslant \|h\|/M$, имеем $\|R(x,h)\| < \|f'(x) \cdot h\|$, откуда $f(x+h) - f(x) \neq 0$. □

Итак, отображение класса C^1 с невырожденной производной будет локально взаимно однозначно. На следующем (ключевом) шаге мы установим, что такое отображение будет, как говорят, *открыто* — переводить открытые множества в открытые.

Лемма 19.5. *Пусть E и F — конечномерные пространства, $U \subset E$ — открытое подмножество, $f\colon U \to F$ — отображение класса C^1. Если $f'(a)$ является изоморфизмом для всякой точки $a \in U$, то множество $f(U) \subset F$ открыто.*

Доказательство. Пусть $a \in U$. Нам надо доказать, что существует окрестность $W \ni f(a)$, обладающая следующим свойством: для всякого $y \in W$ найдется такой $x \in U$, что $f(x) = y$. Мы построим требуемый x с помощью так называемого «метода Ньютона». Именно, для всех x, близких к a, выполнено приближенное равенство $f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a)$. Если бы это равенство было точным (иными словами, если бы отображение f было аффинным), то решение уравнения $f(x) = y$ было бы очевидно: поскольку линейное отображение $f'(a)$ обратимо, можно (и нужно) было бы взять $x = x_1 = a + (f'(a))^{-1}(y - f(a))$. В общем случае точка x_1 является всего лишь приближенным решением уравнения $f(x) = y$; запишем теперь приближенное равенство $f(x) \approx f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1)$ и, заменяя $\approx$ на $=$, найдем решение уравнения $f(x_1)+f'(x_1)(x-x_1) = y$; это решение есть $x_2 = x_1 + (f'(x_1))^{-1}(y - f(x_1))$. Продолжая аналогичным образом, получим рекуррентную последовательность $\{x_n\}$ точек-последовательных приближений

$$x_0 = a; \qquad x_n = x_{n-1} + (f'(x_{n-1}))^{-1}(y - f(x_{n-1})). \tag{19.2}$$

Хочется надеяться, что эта последовательность будет сходиться к точке $x \in U$ и что $f(x) = y$. Покажем, что при всех y, достаточно близких к $f(a)$, так и будет.

Рассуждение начинается так же, как доказательство леммы 19.4: ввиду непрерывности производной от f существует такая окрестность $V_1 \ni a$ и константа $M > 0$, что для всех $p \in V_1$ имеем $\|(f'(p))^{-1}\| \leqslant M$, и при этом по лемме 19.3 существует окрестность $V_2 \ni a$, содержащаяся в V_1 и обладающая тем свойством, что если $x', x'' \in V_2$, то $\|f(x'') - f(x') - f'(x)(x'' - x')\| \leqslant \|x'' - x'\|/2M$. Из (19.2) теперь вытекает, что если $x_{n-1}, x_n \in V_2$, то

$$f(x_n) = f(x_{n-1}) + f'(x_{n-1})f'(x_{n-1})^{-1}(y - f(x_{n-1})) + R_n = y + R_n, \tag{19.3}$$

где

$$\|R_n\| \leqslant \frac{1}{2M}\|(f'(x_{n-1})^{-1})(y - f(x_{n-1}))\| \leqslant \frac{1}{2M}\cdot M\|y - f(x_{n-1})\| \leqslant \frac{1}{2}\|y - f(x_{n-1})\|.$$

Следовательно,

$$\|y - f(x_n)\| \leqslant \frac{1}{2}\|y - f(x_{n-1})\|, \tag{19.4}$$

откуда $\lim f(x_n) = y$, так что если последовательность $\{x_n\}$ сходится к некоторой точке x, то $f(x) = y$. Впрочем, помимо сходимости последовательности $\{x_n\}$ надо еще обеспечить, чтобы все x_n принадлежали V_2, иначе (19.3) и последующая оценка не будет иметь смысла. Чтобы добиться еще и этого, заметим, что при $x_1, \ldots, x_{n-1} \in V_2$ из рекуррентной формулы (19.2) и (19.4) вытекает, что

$$\|x_n - x_{n-1}\| \leqslant M\|f(x_{n-1}) - y\| \leqslant M\|f(a) - y\|/2^{n-1}. \tag{19.5}$$

Следовательно, если точки $x_1, \ldots, x_n$ построены, то

$$\|x_n - a\| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \|x_k - x_{k-1}\| \leqslant M\|f(a) - y\|(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots) \leqslant 2M\|f(a) - y\|. \tag{19.6}$$

Если теперь V_2 содержит шар радиуса δ (относительно нормы $\|\cdot\|$) с центром в точке a, и если $\|f(a) - y\| < \delta/2M$, то из (19.6) следует, что $\|x_n - a\| < \delta$, так что $f_n \in V_2$ для всех n; поскольку, кроме того, ряд $x_0 + \sum_{i \geqslant 1}(x_i - x_{i-1})$ абсолютно сходится по норме ввиду (19.5), последовательность $\{x_n\}$ сходится. Стало быть, окрестность точки $f(a)$ с радиусом $\delta/2M$ содержится в образе отображения f. $\square$

Завершим доказательство теоремы. Пусть $f\colon U \to F$ — отображение класса C^r, и пусть для некоторой точки $a \in U$ отображение $f'(a)\colon E \to F$ является изоморфизмом (обозначения U, E и F имеют прежний смысл). Уменьшая при необходимости открытое множество U, можно считать, что $f'(p)$ — изоморфизм для всех $p \in U$ (ввиду непрерывности f') и что f взаимно однозначно (лемма 19.4). Лемма 19.5 гарантирует, что образ открытого множества при отображении f открыт. Следовательно, $f(U)$ открыто в F и ограничение $f|_U\colon U \to f(U)$ — гомеоморфизм. Пусть $g\colon f(U) \to U$ — обратное (обязательно непрерывное) отображение. Покажем, что g принадлежит классу C^r. В самом деле, пусть $a \in U$ и $b = f(a)$. Покажем, что g дифференцируемо в точке b и что его производная равна $(f'(a))^{-1}$ (ничему другому она равняться и не могла бы!). Нам нужно доказать, что

$$\lim_{y \to b} \frac{\|g(y) - g(b) - ((f'(a))^{-1})(y - b)\|}{\|y - b\|} = 0.$$

Поскольку f и g — взаимно обратные гомеоморфизмы, это равносильно равенству

$$\lim_{x \to a} \frac{\|x - a - ((f'(a))^{-1})(f(x) - f(a))\|}{\|f(x) - f(a)\|} = 0. \tag{19.7}$$

Поскольку f дифференцируемо в точке a, выполнено равенство $f(x) - f(a) = f'(a)(x - a) + \psi(x)$, где $\|\psi(x)\| = o(\|x - a\|)$. Подставляя это в (19.7), получаем, что надо доказать соотношение

$$\lim_{x \to a} \frac{\|f'(a)^{-1}(\psi(x))\|}{f'(a)(x-a) + \psi(x)} = 0. \tag{19.8}$$

Так как f непрерывно дифференцируемо, существует такое $M > 0$, что при всех x, достаточно близких к a, имеем $\|(f'(x))^{-1}\| \leqslant M$, откуда $\|f'(a)(x-a)\| \geqslant \|x-a\|/M$; уменьшая при необходимости окрестность, в которой лежит x, можно добиться того, что $\|\psi(x)\| \leqslant \|x-a\|/2M$; значит, для всех x, достаточно близких к a, норма знаменателя не меньше, чем $\|x-a\|/2M$. Равенство (19.8) отсюда следует, поскольку числитель в (19.8), очевидно, есть $o(\|x-a\|)$.

Так как $g'(b) = (f'(g(b)))^{-1}$, непрерывная дифференцируемость g следует из непрерывности отображения g и операции взятия обратной матрицы.

Заметим, наконец, что при записи производных от f и g в матричном виде коэффициенты матрицы $g' = (f')^{-1}$ будут рациональными функциями от коэффициентов матрицы f'; поскольку последние, по условию, являются r раз непрерывно дифференцируемыми функциями, таковы и коэффициенты матрицы g'. Все доказано.