Лекция 16. Произведение мер; мера Лебега на $\mathbb{R}^n$

Главная цель этой лекции — формализовать в рамках теории меры «принцип Кавальери»: объем тела равен интегралу от площадей его плоских сечений. По ходу дела будет построена и мера Лебега на $\mathbb{R}^n$ для произвольного n.

Чтобы не прерывать нить изложения, начнем со следующей чисто теоретико-множественной леммы.

Лемма 16.1. *Пусть X — произвольное множество и $\mathcal{B} \subset 2^X$ — булева подалгебра. Обозначим через $\mathcal{E}$ наименьшее подмножество в 2^X, содержащее $\mathcal{B}$ и обладающее следующим свойством: если $C_1 \subset C_2 \subset \ldots$ (соотв., $C_1 \supset C_2 \supset \ldots$) — возрастающая (соотв., убывающая) последовательность элементов из $\mathcal{B}$, то $\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i$ (соотв. $\bigcap_{i=1}^{\infty} C_i$) также принадлежит $\mathcal{B}$. Тогда $\mathcal{E}$ является σ-алгеброй.*

Доказательство. Покажем сначала, что $\mathcal{E}$ является булевой подалгеброй в 2^X. Для этого, очевидно, достаточно проверить, что семейство $\mathcal{E}$ замкнуто относительно операции $\setminus$. Зафиксируем произвольное $A \in \mathcal{B}$ и покажем, что $A \setminus C \in \mathcal{E}$ для всякого $C \in \mathcal{E}$. В самом деле, мы утверждаем, что семейство подмножеств $C \subset X$, обладающих свойством $A \setminus C \in \mathcal{E}$, содержит $\mathcal{E}$; чтобы это показать, достаточно убедиться, что, во-первых, $A \setminus C \in \mathcal{E}$, как только $C \in \mathcal{B}$, и во-вторых, что если $C_1 \subset \mathbb{C}_2 \subset \ldots$ (соотв. $C_1 \supset C_2 \supset \ldots$) — возрастающая (соотв. убывающая) последовательность множеств, для которых $A \setminus C_i \in \mathcal{E}$ при всех i, то $A \setminus \bigcup_i C_i \in \mathcal{E}$ (соотв. $A \setminus \bigcap_i C_i \in \mathcal{E}$) также лежит в $\mathcal{E}$. Первое из этих утверждений выполнено, так как $\mathcal{B}$ — булева алгебра, а второе немедленно вытекает из законов де Моргана и определения семейства $\mathcal{E}$.

Далее, зафиксировав произвольный $B \in \mathcal{E}$, аналогичным образом покажем, что

$$\{A \subset X \mid A \setminus B \in \mathcal{E}\} \supset \mathcal{E}.$$

Тем самым доказано, что $\mathcal{E}$ — булева алгебра. Остается показать, что $\mathcal{E}$ замкнуто относительно счетных объединений; так как $\mathcal{E}$ замкнуто относительно конечных объединений и объединений возрастающих последовательностей, это вытекает из тождества

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cup (A_1 \cup A_2) \cup (A_1 \cup A_2 \cup A_3) \cup \ldots.$$

$\square$

Определение 16.2. Пространство с мерой $(X, \mathcal{E}, \mu)$ называется *σ-конечным*, если X представляется в виде не более чем счетного объединения измеримых подмножеств конечной меры.

Если пространство с мерой σ-конечно, то, очевидно, подмножества конечной меры, о которых идет речь в этом определении, можно выбрать попарно не пересекающимися. Часто говорят, что σ-конечным не пространство $(X, \mathcal{E}, \mu)$, а сама мера μ.

Мы построим меру на произведении пространств для случая, когда меры на обоих пространствах σ-конечны.

Пусть $(X, \mathcal{E}, \mu)$ и $(Y, \mathcal{F}, \nu)$ — пространства с σ-конечными мерами. На их произведении $X \times Y$ рассмотрим σ-алгебру $\mathcal{E} * \mathcal{F}$, порожденную всевозможными подмножествами вида $U \times V$, где $U \subset X$ и $V \subset Y$ измеримы.

Если $M \subset X \times Y$ — произвольное подмножество, то положим, для $x \in X$ и $y \in Y$,

$$M_x = \{y \in Y \mid (x, y) \in M\}, \quad M_y = \{x \in X \mid (x, y) \in M\}.$$

Предложение 16.3. *Пусть $M \subset X \times Y$ принадлежит σ-алгебре $\mathcal{E} * \mathcal{F}$. Тогда:*

(1) Множества $M_x \subset Y$ и $M_y \subset X$ измеримы в Y и X соответственно для всяких $x \in X$ и $y \in Y$.

(2) Функции $x \mapsto \nu(M_x)$ и $y \mapsto \mu(M_y)$ измеримы на X и Y соответственно.

(3) $\int_X \nu(M_x) d\mu(x) = \int_Y \mu(M_y) d\nu(y)$.

Доказательство. Обозначим через $\mathcal{S}$ семейство подмножеств $M \subset X \times Y$, обладающих свойствами (1)–(3). Нам достаточно показать, что $\mathcal{S} \supset \mathcal{E} * \mathcal{F}$.

Лемма 16.4. *Пусть $\mathcal{B}$ — семейство подмножеств в $X \times Y$, состоящее из всевозможных конечных объединений попарно непересекающихся множеств вида $U \times V$, где $U \subset X$ и $V \subset Y$ измеримы. Тогда $\mathcal{B}$ является булевой подалгеброй в $2^{X \times Y}$.*

Доказательство леммы. Поскольку $\varnothing$ и $X \times Y$ принадлежат $\mathcal{B}$, достаточно проверить, что $\mathcal{B}$ замкнуто относительно операции $\setminus$. Это тривиально следует из тождества

$$(U_1 \times V_1) \setminus (U_2 \times V_2) = ((U_1 \setminus U_2) \times V_1 \cap V_2)) \sqcup (U_1 \times (V_1 \setminus V_2)).$$

$\square$

Заметим теперь, что включение $\mathcal{S} \supset \mathcal{B}$ очевидно; следовательно, ввиду леммы 16.1 достаточно проверить, что класс $\mathcal{S}$ замкнут относительно объединений и пересечений монотонных последовательностей. Однако же если если $C_1 \subset C_2 \subset \ldots$ (соотв., $C_1 \supset C_2 \supset \ldots$) — возрастающая (соотв., убывающая) последовательность элементов из $\mathcal{S}$, то для объединения $C = \bigcup_{i=1}^{n} C_i$ (соотв. пересечения $C = \bigcap_{i=1}^{n} C_i$) свойство (1) выполнено ввиду того, что множества C_x и C_y являются пересечениями или объединениями множеств $(C_i)_x$ и $(C_i)_y$; свойство (2) вытекает из того, что (например, в случае с объединением) $\nu(C_x) = \lim_{n\to\infty} \nu((C_i)_x)$ ввиду предложения 14.4, а поточечный предел последовательности измеримых функций измерим. Осталось проверить свойство (3). Для случая объединения возрастающей последовательности оно доказывается так. Если $M_1 \subset M_2 \subset \ldots$ и $M = \bigcup_i M_i$, то положим $\varphi_i(x) = \nu((M_i)_x)$, $\varphi(x) = \nu(M_x)$, $\psi_i(y) = \mu((M_i)_y)$, $\psi(y) = \mu(M_y)$; поскольку $\varphi_1 \leqslant \varphi_2 \leqslant \ldots$ и $\varphi(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x)$ (и аналогично для ψ), по теореме Беппо Леви имеем

$$\int_X \nu(M_x)d\mu(x) = \lim_{n\to\infty} \int_X \varphi_n(x)d\mu(x) = \lim_{n\to\infty} \int_Y \psi_n(y)d\nu(y) = \int_Y \mu(M_y)d\nu(y).$$

Для случая пересечения убывающей последовательности множеств M_i проходит полностью аналогичное рассуждение (с использованием предложения 15.13 вместо теоремы Беппо Леви) в случае, когда M содержится в произведении двух подмножеств конечной меры (поскольку при пользовании предложением 15.13 необходимо, чтобы интеграл от первого члена последовательности был конечен). Для произвольного же M мы воспользуемся σ-конечностью мер μ и ν: если $X = \bigsqcup X_i$, $Y = \bigsqcup Y_j$ — представления X и Y в виде дизъюнктного объединения не более чем счетного семейства подмножеств конечной меры, то для каждого из пересечений $M \cap (X_i \times Y_j)$ утверждение верно, откуда утверждение для самого M вытекает из предложения 15.7 и возможности менять порядок суммирования в двойном ряде с положительными членами. □

Предложение-определение 16.5. Для $M \subset X \times Y$, принадлежащего $\mathcal{E} * \mathcal{F}$, положим

$$\lambda(M) = \int_X \nu(M_x)d\mu(x) = \int_Y \mu(M_y)d\nu(y).$$

Отображение $\lambda\colon \mathcal{E} * \mathcal{F} \to [0;\infty]$ корректно определено, и тройка $(X \times Y, \mathcal{E} * \mathcal{F}, \lambda)$ является пространством с мерой. Эта мера обозначается $\mu \times \nu$ и называется *произведением* мер μ и ν.

Доказательство. Единственное еще не доказанное и не вполне очевидное утверждение — счетная аддитивность для $\mu\times\nu$. Если $M = \bigsqcup_{i=1}^{n} M_i$, то $\nu(M_x) = \sum_{i=1}^{n} \nu((M_i)_x)$ для всех $x \in X$. Теперь все следует из теоремы Беппо Леви, так как частичные суммы ряда из положительных функций образуют монотонно возрастающую последовательность. $\square$

Следующее утверждение, логически необходимое для построения теории, гласит, что умножение мер ассоциативно. Его простое и скучное доказательство мы оставляем читателю.

Предложение 16.6. *Пусть $(X, \mathcal{E}, \mu)$, $(Y, \mathcal{F}, \nu)$ и $(Z, \mathcal{G}, \lambda)$ — пространства с σ-конечными мерами. Тогда при естественном отождествлении $(X\times Y)\times Z = X\times(Y\times Z)$ σ-алгебра $(\mathcal{E}*\mathcal{F})*\mathcal{G}$ переходит в $\mathcal{E}*(\mathcal{F}*\mathcal{G})$, а мера $(\mu\times\nu)\times\lambda$ — в $\mu\times(\nu\times\lambda)$.* $\square$

Построенная нами мера на $X \times Y$ обладает техническим недостатком: подмножество множества меры нуль может вообще не быть измеримым (например, если $S \subset X$ неизмеримо, а $T \subset Y$ имеет меру нуль, то $S \times T \subset X \times Y$ неизмеримо, но содержится в имеющем меру нуль множестве $X \times T$). Для пространств с мерой, таковым недостатком не обладающих, имеется специальный термин.

Определение 16.7. Говорят, что пространство с мерой $(X, \mathcal{E}, \mu)$ является *полным* (или что мера μ является *полной*), если всякое подмножество измеримого множества меру нуль измеримо (и имеет, естественно, меру нуль).

Например, мера Лебега на $\mathbb{R}$ полна.

Предложение 16.8. *Пусть $(X, \mathcal{E}, \mu)$ — пространство с мерой. Тогда существуют и единственны наименьшая σ-алгебра $\bar{\mathcal{E}} \supset \mathcal{E}$ и мера $\bar{\mu}\colon \bar{\mathcal{E}} \to [0; +\infty]$, для которых $\bar{\mu}(U) = \mu(U)$ при $U \in \mathcal{E}$ и мера $\bar{\mu}$ полна.*

Доказательство. Поскольку доказательство банально, ограничимся наброском. В любом случае $\bar{\mathcal{E}}$ должно содержать все подмножества измеримых множеств меры нуль. Поэтому $\bar{\mathcal{E}}$ должно содержать и все множества $V \subset X$, обладающие таким свойством:

> *существует такое $U \in \mathcal{E}$, что $V \setminus U$ и $U \setminus V$ содержатся в некоторых множествах, принадлежащих $\mathcal{E}$ и имеющих меру нуль.*

Тривиально проверяется, что семейство $\bar{\mathcal{E}}$, состоящее из подмножеств $V \subset X$, обладающих этим свойством, является σ-алгеброй; если определить при этом $\bar{\mu}(V) = \mu(U)$, то окажется, что $\bar{\mu}$ — мера и что такое продолжение единственно. □

Меру, $\bar{\mu}$ из предложения 16.8 мы будем называть *пополнением* меры μ.

Переход от меры к ее пополнению не влияет на интегралы:

Предложение 16.9. *Пусть $(X, \mathcal{E}, \mu)$ — пространство с мерой и $(X, \bar{\mathcal{E}}, \bar{\mu})$ — его пополнение. Если функция $f\colon X \to [0; +\infty]$ измерима относительно (пополненной) меры $\bar{\mu}$, то существует функция f^1, измеримая относительно исходной меры μ и совпадающая с f почти всюду относительно μ. При этом $\int_X f d\bar{\mu} = \int_X f^1 d\mu$.*

Доказательство. Из конструкции $\bar{\mu}$ ясно, что это утверждение верно для случая, когда f — характеристическая функция $\bar{\mu}$-измеримого множества. Поскольку не более чем счетное объединение множеств меры нуль имеет меру нуль, а интеграл суммы равен сумме интегралов, оно верно и в случае, когда f — конечная линейная комбинация таких функций с неотрицательными коэффициентами, то есть простая (относительно $\bar{\mu}$) функция. Если f — произвольная $\bar{\mu}$-измеримая функция, то $f = \lim_{n\to\infty} f_n$, где функции f_i являются $\bar{\mu}$-простыми, а их последовательность монотонна (лемма 15.12); изменяя каждую из f_i на множестве N_i меры нуль относительно μ, получим μ-измеримую функцию f_i^1; полагая все f_i^1 равными нулю на множестве $\bigcup_i X_i$, также имеющем меру нуль, получим монотонную последовательность μ-измеримых функций, сходящуюся к некоторой (с неизбежностью μ-измеримой) функции f^1, совпадающей с f почти всюду относительно μ. Совпадение интегралов вытекает из теоремы Беппо Леви. □

Вот основное свойство произведений мер.

Теорема 16.10 (Теорема Фубини). *Пусть $(X, \mathcal{E}, \mu)$ и $(Y, \mathcal{F}, \nu)$ — пространства с σ-конечными мерами и функция $f\colon X \times Y \to [0; \infty]$ измерима относительно $\overline{\mu \times \nu}$. Тогда функция $x \mapsto \int_Y f(x, y) d\nu(y)$ измерима относительно μ для почти всех $y \in Y$, функция $y \mapsto \int_X f(x, y) d\mu(x)$ измерима относительно ν для почти всех $x \in X$ и*

$$\int_{X\times Y} fd(\overline{\mu \times \nu}) = \int_X \left(\int_Y f(x, y) d\nu(y)\right) d\mu(x) = \int_Y \left(\int_X f(x, y) d\mu(x)\right) d\nu(y). \tag{16.1}$$

Доказательство. Предположим для начала, что f измерима относительно (непополненной) меры $\mu\times\nu$; покажем, что в этом случае функции $x \mapsto \int_Y f(x,y)d\nu(y)$ и $y \mapsto f(x,y)d\mu(x)$ измеримы для *всех* y (соотв. x), а формула (16.1) верна для интеграла по $\mu\times\nu$. В самом деле, предложение 16.3 показывает, что данное утверждение выполнено, если f — характеристическая функция множества, измеримого относительно $\mu\times\nu$. Следовательно, формула верна и для случая, когда f — линейная комбинация таких функций, т.е. простая функция. Наконец, лемма 15.12 показывает, что ввиду теоремы Беппо Леви формула выполнена и для произвольной $\mu\times\nu$-измеримой функции.

Пусть теперь f измерима относительно пополненной меры $\overline{\mu\times\nu}$. Тогда предложение 16.9 показывает, что, изменив f на некотором множестве $S\subset X\times Y$, имеющем меру нуль относительно непополенной меры $\mu\times\nu$, мы получим функцию f^1, измеримую относительно $\mu\times\nu$. Пусть $S_X=\{x\in X \mid \nu(S_x)\neq 0\}$, $S_Y=\{y\in Y\mid \mu(S_y)\neq 0\}$; поскольку $(\mu\times\nu)(S)=0$, из предложения 16.3 следует, что $\bar\mu(S_X)=\bar\nu(S_Y)=0$; так как для $x\notin S_X$ имеем $\int_Y f^1(x,y)d\nu(y)=\int_Y f(x,y)d\nu(y)$ (и аналогично) для S_Y, все доказано. $\square$

С этого момента мы меняем терминологию и называем произведением мер μ и ν пополненную меру $\overline{\mu\times\nu}$.

Для произвольных суммируемых функций теорема Фубини выглядит так.

Теорема 16.11. *Пусть (X,μ) и (Y,ν) — пространства с σ-конечными мерами и функция $f\colon X\times Y\to\mathbb{C}$ суммируема относительно (пополненной) меры $\mu\times\nu$. Тогда функция $x\mapsto\int_Y f(x,y)d\nu(y)$ суммируема относительно μ для почти всех $y\in Y$, функция $y\mapsto\int_X f(x,y)d\mu(x)$ суммируема относительно ν для почти всех $x\in X$ и*

$$\int_{X\times Y} fd(\mu\times\nu)=\int_X\left(\int_Y f(x,y)d\nu(y)\right)d\mu(x)=\int_Y\left(\int_X f(x,y)d\mu(x)\right)d\nu(y). \tag{16.2}$$

Доказательство.

Лемма 16.12. *Если f — положительная измеримая функция на пространстве с мерой (X,μ) и $\int_X fd\mu<\infty$, то $\mu(f^{-1}(\infty))=0$.*

Доказательство леммы. Если σ_n — функция, равная n там, где $f(x)=\infty$, и нулю в остальных точках, то $\int_X fd\mu \geqslant \int_X\sigma_n d\mu = n\mu(f^{-1}(\infty))$; если $\mu(f^{-1}(\infty))>0$, то получаем противоречие, устремляя n к бесконечности. $\square$

Применяя теорему Фубини для положительных функций и лемму к функции $|f|$, получаем, что $x \mapsto \int_Y |f(x,y)|d\nu(y) < \infty$ для почти всех y (и аналогично для второй переменной), откуда, пользуясь пунктом (3) предложения 15.17, получаем утверждения о суммируемости. Оставшаяся часть теоремы для случая вещественнозначной f получается из теоремы 16.10 с помощью разложения f в разность двух положительных функций, а для случая комплекснозначной f — с помощью выделения действительной и мнимой частей. $\square$

Теперь можно наконец определить меру Лебега на $\mathbb{R}^n$.

Определение 16.13. Мерой Лебега на $\mathbb{R}^n$ называется (пополненное) произведение n экземпляров меры Лебега на $\mathbb{R}$.

Отметим, что корректность этого определения обеспечивает предложение 16.6; из того же предложения вытекает, что произведение мер Лебега на $\mathbb{R}^m$ и $\mathbb{R}^n$ — мера Лебега на $\mathbb{R}^{m+n}$. Отметим также, что произведения интервалов образуют счетную базу топологии на $\mathbb{R}^n$, так что всякое борелевское подмножество в $\mathbb{R}^n$ измеримо по Лебегу.

Далее слово «измеримый» означает «измеримый по Лебегу»; меру Лебега в $\mathbb{R}^n$ будем обозначать μ_n.

Предложение 16.14. *Подмножество $E \subset \mathbb{R}^n$ измеримо по Лебегу тогда и только тогда, когда существует такое борелевское посдмножество $B \subset \mathbb{R}^n$, что $E \triangle B$ измеримо и $\mu(E \triangle B) = 0$.*

Доказательство. Поскольку всякое борелевское множество измеримо, часть «тогда» очевидна; докажем часть «только тогда».

Рассмотрим сначала случай $n = 1$. Поскольку всякое измеримое множество можно представить в виде несвязного объединения счетного семейства ограниченных измеримых множеств, достаточно рассмотреть случай, когда $E \subset \mathbb{R}$ ограничено. Из определения 14.11 вытекает, что существует такая последовательность компактных подмножеств $K_n \subset E$, что $K_j \subset K_{j+1}$ для всех j и $\mu(E \setminus K_j) \leqslant 1/j$. Множество $B = \bigcup K_j$ является борелевским, содержится в E, и $\mu(E \setminus B) = 0$.

Далее будем рассуждать индукцией по n. Пусть через $\mathcal{L}_n$ (соотв. $\mathcal{B}o_n$) обозначена σ-алгебра измеримых (соотв. борелевских) подмножеств в $\mathbb{R}^n$. Покольку $\mathcal{L}_n$ получается пополнением из $\mathcal{L}_{n-1} * \mathcal{L}_1$, для всякого измеримого $E \subset \mathbb{R}^n$ найдется такое $F \in \mathcal{L}_{n-1} * \mathcal{L}_1$, что $\mu_n(E \triangle F) = 0$. Поэтому все будет доказано, если мы установим следующее:

для всякого $F \in \mathcal{L}_{n-1} * \mathcal{L}_1$ найдется такое $B \in \mathcal{B}o_n$, что $\mu_n(F \triangle B) = 0$.

Очевидно, что семйство подмножеств $F \subset \mathbb{R}^n$, обладающих этим свойством, образует σ-алгебру; поэтому для того, тобы убедиться, что это семейство содержит $\mathcal{L}_{n-1} * \mathcal{L}_n$, достаточно проверить, что оно содержит все множества вида $F_1 \times F_2$, где F_1 измеримо в $\mathbb{R}^{n-1}$, а F_2 измеримо в $\mathbb{R}$. По предположению индукции существуют такие борелевские подмножества $B_1 \subset \mathbb{R}^{n-1}$ и $B_2 \subset \mathbb{R}$, что $\mu_{n-1}(F_1 \triangle B_1) = 0$, $\mu_1(F_2 \triangle B_2) = 0$. Остается заметить, что множество $B_1 \times B_2$ является борелевским и $\mu_n((F_1 \times F_2) \triangle (B_1 \times B_2)) = 0$. □

Следующая теорема означает, что мера Лебега на $\mathbb{R}^n$ «регулярна».

Теорема 16.15. *Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$ — измеримое множество конечной меры. Тогда для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое открытое $U \supset E$, что $\mu(U \setminus E) < \varepsilon$ и такое компактное $K \subset E$, что $\mu(E \setminus K) < \varepsilon$.*

Доказательство. Шаг 1. Если $K \subset \mathbb{R}^n$ компактно, то

$$\mu(K) = \inf_{\substack{U \supset E \\ U \text{ открыто}}} \mu(U).$$

Доказательство. Пусть $U_n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \min d(x, K) < 1/n\}$. Тогда $K = \bigcap_{i=1}^{\infty} U_i$, причем все U_i открыты и ограничены (и тем самым имеют конечную меру). Теперь применим следствие 14.5. □

Будем говорить, что измеримое подмножество $E \subset K$ конечной меры является хорошим, если для него выполнено утверждение теоремы 16.15.

Шаг 2. Если E_1 и E_2 — хорошие множества, то множество $E_1 \setminus E_2$ также хорошее.

Доказательство дословно повторяет доказательство предложения 14.13.

Зафиксируем какой-нибудь замкнутый куб $C \subset \mathbb{R}^n$. Из результата шага 1 следует, что все замкнутые подмножества в C (в частности, сам C) являются хорошими.

Шаг 3. Хорошие подмножества в кубе C образуют булеву алгебру.

Доказательство. Поскольку C является хорошим, а результат шага 2 показывает, что семейство хороших подмножеств в C замкнуто относительно разностей и дополнений, это семейство — булева алгебра (ср. доказательство предложения 14.13). □

Шаг 4. Всякое борелевское подмножество в C является хорошим.

Доказательство. Поскольку все замкнутые подмножества в C являются хорошими, достаточно показать, что хорошие подмножества в C образуют σ-алгебру. Так как хорошие подмножества образуют булеву алгебру, для этого достаточно показать, что семейство хороших подмножеств замкнуто относительно бесконечных несвязных объединений. Пусть теперь $E = \bigsqcup_i E_i \subset C$, где все E_i хорошие. Для данного $\varepsilon > 0$ обозначим через $U_i \supset E_i$ открытое множество, для которого $\mu(U_i \setminus E_i) < \varepsilon/2^i$, а через $K_i \subset U_i$ — компактное подмножество, для которого $\mu(E_i \setminus K_i) < \varepsilon/2^{i+1}$. Теперь заметим, что, во-первых,

$$\mu(\bigcup U_i \setminus E) \leqslant \sum \mu(U_i \setminus E_i) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon/2^i = \varepsilon,$$

и во-вторых: поскольку ряд $\sum E_i$ сходится, существует такое N, что $\sum_{i>N} \mu(E_i) < \varepsilon/2$, откуда

$$\mu(E \setminus \bigcup_{i=1}^{N} K_i) \leqslant \sum_{i=1}^{N} \mu(E_i \setminus K_i) + \sum_{i>N} \mu(E_i) < \varepsilon.$$

Стало быть, можно положить $U = \bigcup_i U_i$ и $K = \bigcup_{i=1}^{N} K_i$. □

Шаг 5. Всякое измеримое подмножество в C является хорошим.

Доказательство. Ввиду результат шага 3 достаточно проверить, что хорошим является всякое подмножество меры нуль. И действительно, если $E \subset E' \subset C$, где E' — борелевское множество меры нуль, то для данного ε в качестве U можно взять для E то же множество, что и для E', а в качестве K — одноточечное подмножество. □

Шаг 6. Всякое измеримое подмножество конечной меры является хорошим.

Доказательство. Если $E \subset \mathbb{R}^n$ измеримо и $\mu(E) < \infty$, то можно представить E в виде несвязного счетного объединения ограниченных измеримых множеств E_i; теперь повторим рассуждение из шага 4. □

Теорма доказана. □