Лекция 14. Мера Лебега на $\mathbb{R}$

Мы начнем семестр с обобщения известных из средней школы понятий площади и объема. Первое, что приходит в голову — построить отображение, которое каждому ограниченному подмножеству в $\mathbb{R}^n$ ставит в соответствие некоторое неотрицательное число (его «n-мерный объем»), причем объемы ограниченных множеств конечны, объемы конгруэнтных (совмещающихся движением) множеств совпадают, а объем объединения конечного числа попарно непересекающихся множеств равен сумме их объемов. К сожалению, так не выходит (например, при $n \geqslant 3$ такого отображения не существует); разумная теория получается, если не требовать, чтобы объем был определен на *всех* (хотя бы и ограниченных) подмножествах, но зато потребовать аддитивности относительно счетных объединений. Перейдем к точным определениям.

Определение 14.1. Пусть X — произвольное множество. *Булевой подалгеброй* называется семейство $\mathcal{B} \subset 2^X$, обладающее следующими свойствами:

(1) $\varnothing \in \mathcal{B}$, $X \in \mathcal{B}$;

(2) Если $A, B \in \mathcal{B}$, то $A \cap B$, $A \cup B$ и $A \setminus B$ также лежат в $\mathcal{B}$.

Булева подалгебра $\mathcal{E} \subset 2^X$ называется *σ-алгеброй*, если она обладает следующим свойством:

(3) Если все множества из счетного семейства $A_1, A_2, \ldots, A_n \ldots$ лежат в $\mathcal{E}$, то их пересечение $\bigcap_n A_n$ и объединение $\bigcup_n A_n$ также лежат в $\mathcal{E}$.

Ввиду законов де Моргана в определении σ-алгебры достаточно потребовать замкнутости только относительно счетных объединений (или только счетных пересечений).

Вот важный пример σ-алгебры.

Определение 14.2. Пусть X — топологическое пространство. *σ-алгеброй борелевских множеств* называется наименьшая σ-алгебра, содержащая все открытые множества (или, что равносильно, все замкнутые множества). Подмножество в X называется *борелевским*, если оно является элементом этой σ-алгебры.

Ниже мы будем иметь дело с множеством $[0; \infty]$, состоящим из неотрицательных действительных чисел и символа ∞. Мы будем считать, $\infty + \infty = \infty$, а также что $a < \infty$ и $a + \infty = \infty$ для всякого неотрицательного $a \in \mathbb{R}$. Кроме того, положим $a \cdot \infty = \infty$, если $a > 0$, и $0 \cdot \infty = 0$.

Всякое подмножество в $[0;\infty]$ обладает, очевидно, верхней и нижней гранью. Если $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ — счетное семейство элементов $[0;+\infty]$, то определена сумма $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$: если все a_i конечны и ряд $\sum a_i$ сходится, то это сумма данного ряда, в противном случае $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = \infty$. Сумма $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ не меняется при перестановке элементов a_i.

Определение 14.3. *Пространством с мерой* называется тройка $(X, \mathcal{E}, \mu)$, где X — множество, $\mathcal{E} \subset 2^X$ — σ-алгебра и $\mu\colon \mathcal{E} \to [0;\infty]$ — отображение, удовлетворяющее следующим условиям:

(1) Если $\{A_i\}_{i \in N}$ — счетное семейство попарно непересекающихся элементов из $\mathcal{E}$, то $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$.

(2) Для хотя бы одного $A \in \mathcal{E}$ имеем $\mu(A) < \infty$.

Элементы σ-алгебры $\mathcal{E}$ называются *измеримыми множествами*, а функция μ — мерой; число $\mu(A)$ называется *мерой* множества $A \in \mathcal{E}$.

Свойство (1) называется *счетной аддитивностью.*

Отметим сразу же несколько тривиальных следствий этого определения. Во-первых, если $\mu(A) < \infty$, то, положив в (1) $A_1 = A$ и $A_j = \varnothing$ при $j > 1$, получаем, что $\mu(\varnothing) = 0$; далее, если в условиях (1) все множества A_i, кроме первых n, положить равными $\varnothing$, то из доказанного будет следовать «конечная аддитивность»: $\mu(A_1 \sqcup \ldots \sqcup A_n) = \mu(A) = \mu(A_1) + \ldots + \mu(A_n)$ (здесь и ниже символом $\sqcup$ обозначается объединение попарно непересекающихся множеств). Далее, из конечной аддитивности вытекает, что $\mu(A) \leqslant \mu(B)$ при $A \subset B$, а также что $\mu(A \cup B) \leqslant \mu(A) + \mu(B)$ (поскольку $\mu(A \cup B) = \mu(A \sqcup (B \setminus A))$). Все эти свойства будут далее использоваться без пояснений.

Следующее простое свойство мер заслуживает того, чтоб быть отмеченным отдельно.

Предложение 14.4. *Если $A_1 \subset A_2 \ldots \subset A_n \subset \ldots$ — измеримые множества, то $\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \lim_{i\to\infty} \mu(A_i)$.*

Доказательство. Это немедленно следует из счетной (и конечной) аддитивности и равенства

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \sqcup (A_2 \setminus A_1) \sqcup \ldots \sqcup (A_n \setminus (A_1 \cup \ldots \cup A_{n-1})) \sqcup \ldots .$$

$\square$

Следствие 14.5. *Если $A_1 \supset A_2 \ldots \supset A_n \supset \ldots$ — измеримые множества и $\mu(A_1) < \infty$, то $\mu(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i) = \lim_{i\to\infty} \mu(A_i)$.*

Доказательство. Поскольку $A_1 \setminus A_2 \subset A_1 \setminus A_3 \subset \ldots$ и объединение этой возрастающей последовательности множеств совпадает с $A_1 \setminus (\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i)$, все следует из предложения 14.4 и конечной аддитивности. $\square$

Приведем примеры пространств с мерой. Пусть X — произвольное множество. Объявим все подмножества в X измеримыми и положим, для $A \subset X$, его меру $\mu(A)$ равной количеству элементов в A (если A бесконечно, то $\mu(A) = \infty$). Очевидно, при этом получается пространство с мерой. Другой пример: если $(X, \mathcal{E}, \mu)$ — пространство с мерой и $E \in \mathcal{E}$, то ограничение μ на семейство измеримых множеств, содержащихся в E, задает меру на E.

Чтобы привести более содержательный пример, надо приложить определенные усилия. Именно, сейчас мы построим меру на $\mathbb{R}$, называемую мерой Лебега. Собственно говоря, какой-то элемент из $[0; +\infty]$ (так называемую «внешнюю меру») мы сопоставим *всякому* подмножеству в $\mathbb{R}$, но при этом счетная аддитивность будет гарантирована только на некоторой σ-алгебре (содержащей все борелевские множества).

Заметим, что всякое открытое множество $U \subset \mathbb{R}$ единственным образом представляется в виде объединения не более чем счетного семейства попарно непересекающихся интервалов (они называются *составляющими интервалами* множества U). В самом деле, если ввести на U отношение «$x \sim y$, если существует открытый интервал $(a; b) \subset U$, содержащий x и y», то тривиально проверяется, что $\sim$ — отношение эквивалентности, а также что классы эквивалентности являются связными открытыми подмножествами в $\mathbb{R}$, то есть интервалами. Теперь определим для открытого множества $U \subset \mathbb{R}$ его *меру* $\mu(U)$ как сумму длин составляющих интервалов (длину бесконечного интервала полагаем равной бесконечности).

Определение 14.6. *Внешней мерой* подмножества $E \subset \mathbb{R}$ называется число

$$\mu(E) = \inf_{\substack{U \supset E \\ U \text{ открыто}}} \mu(U).$$

Из этого определения очевидно, что внешняя мера любого интервала (вне зависимости от того, какие из концов в него включены) равна его длине. Ясно также, что $\mu(E) \leqslant \mu(F)$, как только $E \subset F$.

Лемма 14.7. *(1) Если $U_1, U_2, \ldots$ — открытые подмножества в $\mathbb{R}$ и $U = \bigcup U_i$, то $\mu(U) \leqslant \sum \mu(U_i)$.*

(2) Если при этом U_i попарно не пересекаются, то $\mu(U) = \sum \mu(U_i)$.

Доказательство. Утверждение (2) очевидно; докажем (1). Пусть $U = \bigsqcup_j V_j$ — разложение U на составляющие интервалы, и пусть $U_{ij} = U_i \cap V_j$. Поскольку U_{ij} не пересекается с $U_{i'j'}$ при $j \neq j'$, из утверждения (2) следует, что достаточно рассмотреть случай, когда U — интервал; далее, разбивая U_{ij} на составляющие интервалы, сводим задачу к случаю, когда и U, и все U_i являются интервалами. Заметим, что всякий отрезок $T \subset U$ покрывается конечным числом интервалов $U_{i_1}, \ldots, U_{i_k}$, так что имеем

$$\mu(T) \leqslant \mu(U_{i_1}) + \ldots + \mu(U_{i_k}) \leqslant \sum \mu(U_i).$$

Остается заметить, что верхняя грань $\mu(T)$ по всем таким T равна $\mu(U)$. □

Следствие 14.8. *Для конечного или счетного семейства произвольных подмножеств $E_1, E_2, \ldots \subset \mathbb{R}$ имеем $\mu(\bigcup E_i) \leqslant \sum \mu(E_i)$.*

Доказательство. Для всякого $\varepsilon > 0$ найдем такие открытые множества $U_i \supset E_i$, что $\mu(U_i) \leqslant \mu(E_i) + \varepsilon/2^i$. Теперь, ввиду предыдущей леммы, имеем

$$\mu\left(\bigcup E_i\right) \leqslant \mu\left(\bigcup U_i\right) \leqslant \sum \mu(U_i) \leqslant \sum \mu(E_i) + \sum \frac{\varepsilon}{2^i} \leqslant \sum \mu(E_i) + \varepsilon.$$

Остается устремить ε к нулю. □

Следствие 14.9. *Если $A \supset B$, то $\mu(A) - \mu(A \setminus B) \leqslant \mu(B)$.*

Доказательство. Положите $E_1 = A \setminus B$, $E_2 = B$. □

Вот еще одно полезное свойство внешней меры.

Лемма 14.10. *Если $K_1, \ldots, K_n \subset \mathbb{R}$ — попарно непересекающиеся компактные подмножества, то $\mu(K_1 + \ldots + K_n) = \mu(K_1) + \ldots + \mu(K_n)$.*

Доказательство. Ясно, что достаточно рассмотреть случай $n = 2$. Покажем, что существуют такие открытые подмножества $U_1, U_2 \subset \mathbb{R}$, что $U_i \supset K_i$ и $U_1 \cap U_2 = \varnothing$. В самом деле, для $x \in \mathbb{R}$ и $A \subset \mathbb{R}$ положим $d(x, A) = \inf_{y \in A} |x - y|$ («расстояние от точки до подмножества»). Теперь легко видеть, что если положить $U_1 = \{x \mid d(x, K_1) < d(x, K_2)\}$ и $U_2 = \{x \mid d(x, K_2) < d(x, K_1)\}$, то множества U_1 и U_2 обладают требуемыми свойствами.[6]

[6]То же рассуждение проходит, если заменить $\mathbb{R}$ на произвольное метрическое пространство, а K_1 и K_2 — на два его непересекающихся замкнутых подмножества. По-ученому говоря, это означает, что метрические пространства «нормальны».

Из доказанного вытекает, что всякое открытое множество $V \supset K_1 \cup K_2$ содержит открытое подмножество вида $V_1 \sqcup V_2$, где V_1 и V_2 открыты и $V_i \supset K_i$ (достаточно положить $V_i = V \cap U_i$). Теперь искомое равенство очевидно. $\square$

Определение 14.11. Ограниченное подмножество $E \subset \mathbb{R}$ называется *измеримым по Лебегу* (далее мы будем говорить просто «измеримым»), если для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое компактное подмножество $K \subset E$, что $\mu(E) \leqslant \mu(K) + \varepsilon$.

(Измеримость для неограниченных множеств мы определим чуть позже.)

Заметим, что всякое компактное подмножество в $\mathbb{R}$ автоматически является измеримым. Очевидно, что измерим и всякий ограниченный интервал. Так как всякое открытое множество является объединением не более чем счетного семейства непересекающихся интервалов, измеримость ограниченных открытых множеств будет являться очень частным случаем следующего важного факта:

Лемма 14.12. *Пусть $E_1, E_2, \ldots$ — конечное или счетное семейство попарно непересекающихся ограниченных измеримых множеств, и пусть $E = \bigsqcup_i E_i$. Тогда:*

(1) $\mu(E) = \sum \mu(E_i)$.

(2) Если E ограничено, то оно измеримо.

Доказательство. Ввиду следствия 14.8 для доказательства (1) достаточно установить, что $\sum \mu(E_i) \leqslant \mu(E)$. Зададимся произвольным $\varepsilon > 0$ и выберем компактные подмножества $K_i \subset E_i$, для которых $\mu(E_i) \leqslant \mu(K_i) + \varepsilon/2^i$. Поскольку E_i попарно непересекаются, таковы же и K_i. Поэтому из леммы 14.10 вытекает, что

$$\mu(E_1)+\ldots+\mu(E_n) \leqslant \mu(K_1)+\ldots+\mu(K_n)+\varepsilon = \mu(K_1\sqcup\ldots\sqcup K_n)+\varepsilon \leqslant \mu(E)+\varepsilon.$$

Устремляя n к бесконечности, а затем ε к нулю, получаем (1).

Предположим теперь, что E ограничено, и пусть $\varepsilon > 0$. Так как $\sum \mu(E_i) = \mu(E) < \infty$, из (1) вытекает существование такого $n \in \mathbb{N}$, что $\mu(E) \leqslant \mu(E_1) + \ldots + \mu(E_n) + \varepsilon/2$. Так как все E_i измеримы, для всякого $i \leqslant n$ найдется компактное $K_i \subset E_i$, для которого $\mu(E_i) \leqslant \mu(K_i) + \varepsilon/2n$. Принимая во внимание (1), имеем

$$\mu(E) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \mu(E_i) + \varepsilon/2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} K_i + \varepsilon = \mu(K_1 \sqcup \ldots \sqcup K_n) + \varepsilon,$$

чем измеримость множества E и доказана. $\square$

Лемма 14.13. *Если E_1 и E_2 — ограниченные измеримые множества, то $E_1 \setminus E_2$, $E_1 \cap E_2$ и $E_1 \cup E_2$ — также ограниченные измеримые множества.*

Доказательство. Из равенств $E_1 \cap E_2 = E_1 \setminus (E_1 \setminus E_2)$ и $E_1 \cup E_2 = E_1 \sqcup (E_2 \setminus E_1)$ в сочетании с леммой 14.12 вытекает, что достаточно доказать утверждение про разность. Заметим, что для $i = 1, 2$ и данного $\varepsilon > 0$ существуют компактное множество K_i и открытое множество U_i, для которых $K_i \subset E_i \subset U_i$, причем $\mu(K_i) + \varepsilon/2 \geqslant \mu(E_i) \geqslant \mu(U_i) - \varepsilon/2$. Покольку множества U_i и K_i, будучи соответственно открытым и компактным, являются ограниченными измеримыми, из леммы 14.12 вытекает, что $\mu(U_i \setminus K_i) = \mu(U_i) - \mu(K_i)$; следовательно, $\mu(U_i \setminus K_i) \leqslant \mu(U_i) - \mu(K_i) \leqslant \varepsilon$ при $i = 1, 2$.

Заметим, что для измеримости $E_1 \setminus E_2$ достаточно построить (для всякого $\varepsilon > 0$) открытое множество U и компактное множество K, для которых $U \supset E_1 \setminus E_2 \supset K$ и $\mu(U \setminus K) \leqslant 2\varepsilon$: в самом деле, тогда

$$\mu(E_1 \setminus E_2) - \mu(K) \leqslant \mu((E_1 \setminus E_2) \setminus K) \leqslant \mu(U \setminus K) \leqslant 2\varepsilon.$$

Положим теперь $U = U_1 \setminus K_2$ и $K = K_1 \setminus U_2$; тогда

$$U \setminus K \subset (U_1 \setminus K_1) \cup (U_2 \setminus K_2),$$

откуда по следствию 14.8 имеем $\mu(U \setminus K) \leqslant \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$, и все доказано. □

Вот теперь мы можем определить меру Лебега на $\mathbb{R}$.

Определение 14.14. Подмножество $E \subset \mathbb{R}$ называется *измеримым по Лебегу*, если его пересечение со всяким конечным интервалом является измеримым ограниченным множеством в смысле определения 14.11.

Если $E \subset \mathbb{R}$ — измеримое по Лебегу множество, то его *мерой Лебега* называется внешняя мера $\mu(E)$.

Из леммы 14.13 вытекает, что всякое ограниченное измеримое множество является измеримым по Лебегу.

Теорема 14.15. *Тройка $(\mathbb{R}, \mathcal{L}, \mu)$, где через $\mathcal{L}$ обозначено множество измеримых по Лебегу подмножеств в $\mathbb{R}$, является пространством с мерой.*

Доказательство. Почти все уже сделано, остается только собрать результаты воедино.

Нам надо проверить, что $\mathcal{L}$ является σ-алгеброй и что μ счетно аддитивна на $\mathcal{L}$. Из определения и леммы 14.13 вытекает, что $\mathcal{L}$ является булевой алгеброй; из того же определения и леммы 14.12 вытекает, что если $\{E_i\}$ — не более чем счетное семейство попарно непересекающихся измеримых множеств, то измеримо и их объединение $\bigcup E_i$. Если же семейство $\{E_i\}$ измеримых множеств произвольно, заметим, что

$$\bigcup_i E_i = E_1 \sqcup (E_2 \setminus E_1) \sqcup (E_3 \setminus (E_1 \cup E_2)) \dots,$$

причем все множества в правой части измеримы, так как измеримые множества образуют булеву алгебру.

Чтобы установить, наконец, счетную аддитивность, представим теперь $\mathbb{R}$ каким-либо способом в виде счетного объединения попарно непересекающихся ограниченных измеримых подмножеств (например, интервалов вида $[n; n+1)$) и запишем это разбиение в виде $\mathbb{R} = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} S_i$. Из леммы 14.12 следует, что $\mu(E) = \sum_j \mu(E \cap S_j)$ для всякого измеримиого множества E. Если теперь $\{E_i\}$ — не более чем счетное семейство попарно непересекающихся измеримых множеств и $E = \bigcup_i E_i$, то имеем

$$\mu(E) = \sum_j \mu(E \cap S_j) = \sum_j \sum_i \mu(E_i \cap S_j) = \sum_i \sum_j \mu(E_i \cap S_j) = \sum_i \mu(E_i)$$

(перестановка суммирований законна, так как мы имеем дело с рядами с положительными членами). Все доказано. $\square$

Следствие 14.16. *Всякое борелевское подмножество в $\mathbb{R}$ измеримо по Лебегу.*

В самом деле, всякое открытое множество принадлежит σ-алгебре измеримых множеств.