НМУ, 2 курс, дифференциальная геометрия. Листок 8.
Римановы многообразия. Геодезические. 10.04.2006

Задача 1. Докажите, что для римановой связности тензор Риччи симметричен.

Задача 2. Доказать, что из-за многочисленных симметрий тензор Римана на двумерном многообразии полностью определяется своей компонентой R_{1212}.

Задача 3. Докажите, что на двумерном многообразии верно тождество

$$R = \frac{2R_{1212}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}.$$

Задача 4. Докажите, что на двумерной поверхности в трехмерном пространстве скалярная кривизна равна удвоенной гауссовой кривизне.

Задача 5*. Докажите, что на трехмерном многообразии тензор Риччи полностью определяет тензор Римана по формуле

$$R_{ij,kl} = R_{ik}g_{jl} + R_{jl}g_{ik} - R_{il}g_{jk} - R_{jk}g_{il} + \frac{R}{2}(g_{il}g_{jk} - g_{ik}g_{jl}).$$

Задача 6. Пусть σ двумерное подпространство касательного пространства, натянутое на векторы X и Y. Докажите, что секционная кривизна вдоль плоскости (или двумерного направления) σ

$$K(\sigma) = \frac{< R(X,Y)X, Y >}{< X, X >< Y, Y > - < X, Y >^2}$$

корректно определена, то есть не зависит от выбора векторов X и Y, порождающих σ.

Задача 7. Докажите, что для сферы $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ радиуса r тензор Римана выражается так: $R(X,Y)Z = \frac{1}{r^2}(< Y, Z > X - < X, Z > Y)$.

Задача 8. Докажите, что в предыдущей задаче секционная кривизна не зависит ни от точки, ни от направления, и равна $K = \frac{1}{r^2}$.

Задача 9. Фиксируем точку p на римановом многообразии M. Определим экспоненциальное отображение $\exp_p : T_pM \longrightarrow M$ как $\exp_p(\xi) = \gamma_\xi(1)$, где $\xi \in T_pM$, а $\gamma_\xi(t)$ геодезическая выходящая из p с вектором скорости ξ.

а) Докажите, что экспоненциальное отображение является диффеоморфизмом достаточтно малой окрестности нулевого вектора касательной плоскости на свой образ.

б) Экспоненциальное отображение вводит так называемые геодезические координаты в окрестности p : фиксируем базис в касательном пространстве T_pM, тогда координаты касательного вектора v в этом базисе по определению будут геодезическими координатами точки $\exp_p(v)$. Докажите, что в этих координатах в точке p символы Кристоффеля обращаются в ноль.

Задача 10. Найти все геодезические на плоскости Лобачевского. Можно взять любую из моделей плоскости Лобаческого, например верхнюю полуплоскость с метрикой $\frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$.

Задача 11. Докажите, что в полугеодезических координатах $x^1, \ldots, x^n$, то есть в таких координатах, в которых метрика имеет вид

$$\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n-1} g_{ij}dx^i dx^j + (dx^n)^2,$$

кривые $x^1 = const, \ldots, x^{n-1} = const$ являются геодезическими с параметром $t = x^n$.

Задача 12. Докажите, что геодезическая $\exp_p(tv)$ и геодезическая сфера $\exp_p(S_\delta)$, где $S_\delta = \{v \in T_pM \,||v| = \delta\}$, всегда ортогональны друг другу. Как при помощи этого наблюдения ввести полугеодезические координаты в окрестности точки p?