3. Тензорное произведение

Определение и общие свойства

Пусть M и N — модули над (коммутативным, как водится[1]) кольцом A. Неформально говоря, их тензорное произведение — это «наибольший образ билинейного отображения из $M \times N$». Вот точные определения.

Определение 3.1. Пусть M, N и P — модули над кольцом A. Отображение $\Phi\colon M \times N \to P$ называется *билинейным*, если для всякого $m \in M$ отображение $x \mapsto \Phi(m, x)$ является гомоморфизмом A-модулей из N в P и для всякого $n \in N$ отображение $x \mapsto \Phi(x, n)$ является гомоморфизмом A-модулей из M в P.

Определение 3.2. Пусть M, N и P — модули над кольцом A. Пара (T, Φ), состоящая из A-модуля T и билинейного отображения $\Phi\colon M \times N \to T$, называется *тензорным произведением M и N над A*, если для всякого билинейного отображения $\Psi\colon M \times N \to P$ существует и единствен гомоморфизм $\varphi\colon T \to P$, для которого $\Phi = \varphi \circ \Phi$:

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "\Phi"] \arrow[dr, "\Psi"'] & T \arrow[d, dashed, "\varphi"] \\ & P. \end{tikzcd}$$

Из общекатегорных соображений («единственность представляющего объекта») почти очевидно, что тензорное произведение единственно (если оно существует). Именно,

Предложение 3.3. *Если (T_1, Φ_1) и (T_2, Φ_2) — тензорные произведения модулей M и N, то существует изоморфизм $\varphi\colon T_1 \xrightarrow{\sim} T_2$, для которого $\varphi \circ \Phi_1 = \Phi_2$.*

Доказательство. Из определения вытекает существование гомоморфизмов $\varphi'\colon T_1 \to T_2$ и $\varphi''\colon T_2 \to T_1$, для которых $\varphi' \circ \varphi_1 = \varphi_2$ и $\varphi'' \circ \varphi_2 = \varphi_1$. Из этих равенств вытекает, что $(\varphi'' \circ \varphi') \circ \varphi_1 = \varphi_1$, откуда (ввиду единственности гомоморфизма φ из определения) имеем $\varphi'' \circ \varphi' = \mathrm{id}$. Аналогично устанавливается, что $\varphi' \circ \varphi'' = \mathrm{id}$. $\square$

Существование тензорного произведения доказывается также несложно. Именно, рассмотрим свободный A-модуль с базисом, состоящим из всевозможных упорядоченных пар (m, n), где $m \in M$, $n \in N$, и

[1]Тензорное произведение можно определить и для модулей над некоммутативными кольцами; теория при этом получается похожая, но не совсем такая же, как в коммутативном случае. В нашем курсе мы этим заниматься не будем.

отфакторизуем его по подмодулю, порожденному элементами

$$a(m,n)-(am,n),\ a(m,n)-(m,an),$$
$$(m_1+m_2,n)-(m_1,n)-(m_2,n),$$
$$(m,n_1+n_2)-(m,n_1)-(m,n_2)$$

для всевозможных $m, m_1, m_2 \in M$, $n, n_1, n_2 \in N$, $a, b \in A$. Обозначим получившийся в результате A-модуль через $M \otimes_A N$ (иногда индекс A в этом обозначении будет опускаться), а образ пары (m,n) в $M \otimes N$ будем обозначать через $m \otimes n$. Отображение $\Phi\colon M \times N \to M \otimes_A N$, заданное формулой $(m,n) \mapsto m \otimes n$, будет по построению билинейно. Теперь легко видеть, что *пара* $(M \otimes_A N, \Phi)$ *является тензорным произведением модулей* M *и* N. В самом деле, если $\Psi\colon M \times N \to P$ — билинейное отображение, и если для гомоморфизма $\varphi\colon M \otimes_A N \to P$ имеем $\varphi \circ \Phi = \Psi$, то должно выполняться равенство

$$\varphi(m \otimes n) = \Psi(m,n), \tag{3.1}$$

откуда получаем единственность гомоморфизма φ, и при этом отображение, заданное формулой (3.1), корректно определено, что доказывает существование такого гомоморфизма.

Приведем два важных свойства тензорного произведения, доказываемые непосредственно из определения 3.2 (тривиальные доказательства предоставляются читателю).

Предложение 3.4. *Пусть M_1, M_2 и M_3 — модули над кольцом A. Тогда имеют место изоморфизмы $M_1 \otimes M_2 \simeq M_2 \otimes M_1$ и $M_1 \otimes (M_2 \otimes M_3) \simeq (M_1 \otimes M_2) \otimes M_3$, задаваемые формулами $m_1 \otimes m_2 \mapsto m_2 \otimes m_1$ и $m_1 \otimes (m_2 \otimes m_3) \mapsto (m_1 \otimes m_2) \otimes m_3$.*

Предложение 3.5. *Пусть $\{M_i\}_{i \in I}$ — семейство A-модулей и N — еще один A-модуль. Тогда имеет место изоморфизм*

$$\left(\bigoplus M_i\right) \otimes N \xrightarrow{\sim} \bigoplus (M_i \otimes N),$$

задаваемый формулой $\{m_i\} \otimes n \mapsto \{m_i \otimes n\}$.

Первые примеры

Пример 3.6. Пусть A-модули M и N свободны; если $\{e_\alpha\}_{\alpha \in I}$ и $\{f_\beta\}_{\beta \in J}$ суть базисы в M и N соответственно, то $M \otimes_A N$ — *также свободный A-модуль с базисом* $\{e_\alpha \otimes f_\beta\}_{(\alpha,\beta) \in I \times J}$.

В самом деле, поскольку M и N свободны, всякое билинейное отображение из $M \times N$ в P однозначно определяется значениями на парах (e_α, f_β), причем эти значения можно выбирать произвольно; отсюда немедленно следует, что определенный выше модуль $M \otimes_A N$ вместе с билинейным отображением, заданным на элементах базисов по правилу $(e_\alpha, f_\beta) \mapsto e_\alpha \otimes f_\beta$, удовлетворяет условиям определения 3.2.

Пример 3.7. Пусть $A = \mathbb{Z}$, $M = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, $N = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, где $(m, n) = 1$. *Тогда* $M \otimes N = 0$.

В самом деле, если $\bar{x} = x \bmod m \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, $\bar{y} = y \bmod n \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, то $\bar{x} \otimes \bar{y} = xy(\bar{1} \otimes \bar{1})$, и при этом, если $um + vn = 1$, где $u, v \in \mathbb{Z}$, то

$$\begin{aligned}\bar{1} \otimes \bar{1} = (um + vn)(\bar{1} \otimes \bar{1}) = um(\bar{1} \otimes \bar{1}) + vn(\bar{1} \otimes \bar{1}) = \\ = u(m\bar{1} \otimes \bar{1}) + v(\bar{1} \otimes n\bar{1}) = u(0 \otimes \bar{1}) + v(\bar{1} \otimes 0) = 0.\end{aligned}$$

Пример 3.8. Если M — модуль над кольцом A, и если рассматривать A как модуль над собой, то $A \otimes_A M \simeq M$, причем изоморфизм задается отображением $a \otimes m \mapsto am$.

В самом деле, тривиально проверяется, что билинейное отображение $(a, m) \mapsto am$ обладает свойством универсальности из определения 3.2.

Точность справа

Если $f\colon M_1 \to M_2$ — гомоморфизм A-модулей, то для всякого A-модуля N он индуцирует гомоморфизм $f \otimes 1\colon M_1 \otimes N \to M_2 \otimes N$, заданный формулой $m \otimes n \mapsto f(m) \otimes n$. Выражаясь более по-ученому, операция «тензорное произведение на фиксированный модуль N» является функтором. Основное свойство этого функтора состоит в том, что он «точен справа». Это означает буквально следующее:

Предложение 3.9. *Для всякой точной последовательности A-модулей*

$$M' \xrightarrow{i} M \xrightarrow{\pi} M'' \to 0 \tag{3.2}$$

и всякого A-модуля N индуцированная последовательность

$$M' \otimes N \xrightarrow{i\otimes 1} M \otimes N \xrightarrow{\pi\otimes 1} M'' \otimes N \to 0 \tag{3.3}$$

является точной.

Доказательство. Имеем, очевидно, $(\pi\otimes 1)\circ(i\otimes 1) = (\pi\circ i)\otimes 1 = 0$ (функториальность!), так что $\pi \otimes 1$ индуцирует гомоморфизм $g\colon \operatorname{Coker}(i \otimes 1) \to M''\otimes N$ (по определению, если $\varphi\colon U \to V$, то $\operatorname{Coker}(\varphi) = V/\operatorname{Im}(\varphi)$), и утверждение предложения равносильно тому, что этот гомоморфизм является изоморфизмом. Эпиморфность очевидна ($M'' \otimes N$ порожден элементами вида $m'' \otimes n$, и если $m'' = \pi(m)$, то $m'' \otimes n = (\pi \otimes 1)(m \otimes n)$); для доказательства мономорфности построим обратный гомоморфизм

$h\colon M'' \otimes N \to \mathrm{Coker}(i \otimes 1)$. Именно, если $m'' \in M''$, $n \in N$ и $m'' = \pi(m)$, то положим

$$h(m'' \otimes n) = (m \otimes n) \bmod (i \otimes 1)(M'' \otimes N).$$

Этот гомоморфизм корректно определен, поскольку если $m'' = \pi(m_1) = \pi(m_2)$, то $m_1 - m_2 = i(m')$ для некоторого $m' \in M''$, и

$$m_1 \otimes n - m_2 \otimes n = i(m') \otimes n = (i \otimes 1)(m' \otimes n) \in \mathrm{Im}(i \otimes 1).$$

Ясно, что $g \circ h = h \circ g = \mathrm{id}$. $\square$

Замечание 3.10. Неверно, тем не менее, что после тензорного умножения на данный модуль N *всякая* точная последовательность остается точной: это неверно уже для последовательностей вида $0 \to E \xrightarrow{i} F$. Иными словами, даже если гомоморфизм i инъективен, гомоморфизм $i \otimes 1$ инъективным быть не обязан. Простой пример: в $\mathbb{Z}$-модуле $\mathbb{Z} \otimes (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ имеются ненулевые элементы (см. пример 3.8); с другой стороны, если $i\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ — умножение на $n \neq 0$, а $i \otimes 1\colon \mathbb{Z} \otimes (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \to \mathbb{Z} \otimes (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ — индуцированный гомоморфизм, то для всяких $x \in \mathbb{Z}$, $y \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ имеем

$$(i \otimes 1)(x \otimes y) = nx \otimes y = x \otimes ny = x \otimes 0 = 0.$$

Модули, тензорное умножение на которые сохраняет точность *любой* точной последовательности, называются *плоскими*.

Дальнейшие примеры

Пример 3.11. Если M — свободный A-модуль с базисом $\{e_i\}_{i \in I}$, то $M \otimes N$ является прямой суммой семейства модулей, изоморфных N, причем это семейство занумеровано элементами множества I.

В самом деле, это вытекает из предложения 3.5 и примера 3.8. Заметим, кстати, что из этого вытекает и следующее утверждение: если $0 \to E \xrightarrow{i} F$ — точная последовательность и M — свободный A-модуль, то последовательность $0 \to E \otimes M \xrightarrow{i \otimes 1} F \otimes M$ также точна («свободные модули являются плоскими»).

Пример 3.12. Если $\mathfrak{a} \subset A$ — идеал и M — произвольный A-модуль, то $A/\mathfrak{a} \otimes_A M \simeq M/\mathfrak{a}M$.

В самом деле, применяя предложение 3.9 к точной последовательности

$$\mathfrak{a} \hookrightarrow A \to A/\mathfrak{a} \to 0$$

и модулю M, получаем, что модуль $A/\mathfrak{a} \otimes_A M$ изоморфен фактору $A \otimes M = M$ по образу отображения $\mathfrak{a} \otimes M \to M$, индуцированного вложением $\mathfrak{a} \hookrightarrow A$. Поскольку при этом отображении $a \otimes m$ переходит в am (см. пример 3.8), образ этого отображения есть $\mathfrak{a}M$.

Пример 3.13 (Расширение скаляров). Всякий гомоморфизм колец $\varphi\colon A \to B$ позволяет рассматривать B как A-модуль, в котором действие A на B задается по правилу $a \cdot b = \varphi(a)b$ (в такой ситуации говорят, что B является A-*алгеброй*). Пусть теперь, помимо этого гомоморфизма, задан A-модуль M. Тогда *на A-модуле $M \otimes_A B$ можно ввести и структуру B-модуля!* Именно, определим действие элемента $b_1 \in B$ на $m \otimes b$ по правилу $b_1 \cdot (m \otimes b) = m \otimes bb_1$; тривиально проверяется, что это действие корреткно определено и задает структуру B-модуля. Говорят, что $M \otimes_A B$ с такой структурой B-модуля есть B-модуль, получаемый из M с помощью *расширения скаляров от A до B*. Этот B-модуль обозначается также M_B.

Расширение скаляров можно также охарактеризовать с помощью универсального свойства; доказательство следующего предложения (немедленно вытекающего из определения M_B) предоставляется читателю:

Предложение 3.14. *Пусть M — модуль над кольцом A и $\varphi\colon A \to B$ — гомоморфизм колец. Тогда для всякого B-модуля N и гомоморфизм абелевых групп $g\colon M \to N$, удовлетворяющего условию $g(am) = \varphi(a)g(m)$ для всех $a \in A$, существует и единствен гомоморфизм B-модулей $h\colon M_B \to N$, удовлетворяющий условию $h(m \otimes 1) = g(m)$ для всех $m \in M$.*

Говоря по-ученому, функтор «расширение скаляров» (из категории A-модулей в категорию B-модулей) сопряжен слева к действующему в противоположную сторону функтору «ограничение скаляров», ставящему в соответствие B-модулю N модуль над A, совпадающий с N как абелева группа, на котором A действует по правилу $a \cdot n = \varphi(a)n$.

Пример 3.15 (Локализация). Если $S \subset A$ — мультипликативное множество и M — модуль над A, то $S^{-1}M$ как модуль над $S^{-1}A$ получается из M с помощью расширения скаляров относительно канонического гомоморфизма $\varphi\colon A \to S^{-1}A$.

Проще всего вывести этот факт из предложения 3.14.

В свете предложения 2.6 можно сказть, что $S^{-1}A$ является плоским A-модулем.

Пример 3.16. Пусть $f\colon A \to B$, $g\colon A \to C$ — гомоморфизмы колец. Эти гомоморфизмы задают на B и C структуру A-модулей. Стало быть, можно рассмотреть A-модуль $B \otimes_A C$. *На этом A-модуле можно ввести структуру кольца.* Именно, умножение задается по такому правилу: $(b_1 \otimes b_2)(c_1 \otimes c_2) = (b_1c_1) \otimes (b_2c_2)$.

Проверка корректности этого определения опять-таки предоставляется читателю.

Построенное в примере 3.16 кольцо также можно охарактеризовать с помощью универсального свойства. Именно, заметим прежде всего, что отображения $g' \colon b \mapsto b \otimes 1$ и $f' \colon c \mapsto 1 \otimes c$ являются гомоморфизмами из B и C соответственно в $B \otimes_A C$, причем диаграмма

$$\begin{tikzcd}
 & B \arrow[dr, "g'"] & \\
A \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "g"'] & & B \otimes_A C \\
 & C \arrow[ur, "f'"'] &
\end{tikzcd}$$

коммутативна. Имея это в виду, сформулируем следующее

Предложение 3.17. *В условиях примера 3.16 пусть* $\tilde{f} \colon B \to D$ *и* $\tilde{g} \colon C \to D$ *— гомоморфизмы колец, делающие внешний четырехугольник диаграммы* (3.4) *коммутативным (иными словами, пусть* $\tilde{f} \circ g = \tilde{g} \circ f$*).*

$$\begin{tikzcd}
 & B \arrow[dr, "g'"'] \arrow[drr, "\tilde{g}"] & & \\
A \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "g"'] & & B \otimes_A C \arrow[r, dashed, "h"] & D \\
 & C \arrow[ur, "f'"] \arrow[urr, "\tilde{f}"'] & &
\end{tikzcd} \tag{3.4}$$

Тогда существует и единствен гомоморфизм $h \colon B \otimes_A C \to D$*, делающий диаграмму* (3.4) *коммутативной.*

Доказательство можно спокойно предоставить читателю (скажем только, что гомоморфизм h имеет вид $b \otimes c \mapsto \tilde{g}(b)\tilde{f}(c)$).