1 Лекция 8.

Мы показали, как построить кокасательное расслоение T^*M к гладкому многообразию M, исходя, по сути, только из кольца функций $C^\infty(M,\mathbb{R})$. Для полноты изложения, покажем еще, как можно, стартуя с $C^\infty(M,\mathbb{R})$, восстановить само M как множество (в предположении, что многообразие M компактно).

Заметим, что каждая точка $x \in M$ определяет отображение колец $\varphi_x : C^\infty(M,\mathbb{R})$ – "значение в точке x" (функция $f \in C^\infty(M,\mathbb{R})$ переходит в число $f(x) \in \mathbb{R}$).

Лемма 1.1. *Пусть M – компактное многообразие. Тогда любой гомоморфизм колец $\varphi : C^\infty(M,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ имеет вид $\varphi = \varphi_x$ для какой-то точки $x \in M$.*

Доказательство. Будем доказывать от противного: пусть дан гомоморфизм колец $\varphi : C^\infty(M,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, который не равен φ_x ни для какого $x \in M$. Обозначим ядро φ через $\mathfrak{m} \subset C^\infty(M,\mathbb{R})$. Пусть $x \in M$ – любая точка. Если все $f \in \mathfrak{m}$ обращаются в ноль в $x \in M$, т.е. отображение φ_x зануляется на $\mathfrak{m}$, то φ_x пропускается через φ, а потому $\varphi_x = \varphi$. Поэтому по предположению, существует такая $f_x \in \mathfrak{m}$, что $f(x) \neq 0$. Для определенности, пусть $f(x) > 0$. Тогда $f > 0$ и на какой-то окрестности $U_x \subset M$ точки x.

Выберем гладкую функцию $\psi_x \in C^\infty(M,\mathbb{R})$, которая всюду неотрицательна, равна нулю вне U_x, и равна 1 в некоторой меньшей окрестности $U'_X \subset U_x$ точки x. Положим $g_x = f_x\psi_x$. Тогда $\varphi(g_x) = \varphi(\psi_x)\varphi(f_x) = \varphi(\psi_x)\cdot 0 = 0$, т.е. $g_x \in \mathfrak{m}$; с другой стороны, по построению $g_x \geq 0$ всюду и $g_x(x) > 0$ на U'_x.

Т.к. U'_x покрывают M, а M компактно, то можно выбрать конечное подпокрытие U_i с соотстветствующими функциями g_i. Рассмотрим функцию

$$g = g_1 + \dots + g_k, \tag{1.1}$$

– сумму всех g_i. Тогда с одной стороны, $g \in \mathfrak{m}$, а с другой стороны, $g > 0$ в каждой точке M. Поэтому g^{-1} – гладкая функция на M, и имеем противоречие: $1 = \varphi(1) = \varphi(g)\varphi(g^{-1}) = 0$. □

Практическая ценность этой Леммы невелика: хотя мы и построили M как множество, восстановить топологию на нем, по-видимому, не удается. Однако технический прием, использованный при доказательстве, в науке про гладкие многообразия очень распространен. Его можно чуть уточнить.

Определение 1.2. Пусть U_i – открытое покрытие многообразия M. *Разбиением единицы, подчиненным покрытию* M, называется такой набор гладких функций $\varphi_i \in C^\infty(M,\mathbb{R})$, что $\varphi_i = 0$ вне U_i, и $1 = \varphi_1 + \dots + \varphi_k$.

Доказательство Леммы 1.1 показывает также, что для любого открытого покрытия компактного мгообразия существует подчиненное ему разбиение единицы: поскольку все ψ_i неотрицательны, и в любой точке хотя бы одно из них положительно, можно взять

$$\varphi_i = \frac{\psi_i}{\psi_1 + \dots + \psi_k}.$$

Замечание 1.3. Если внимательно разобрать доказательство Леммы 1.1, то видно, что конечность покрытия на самом деле не важна: важно, что *каждая точка $x \in M$* принадлежала лишь конечному числу элементов покрытия. Тогда сумма (1.1) хорошо определена. Такое покрытие называется *локально конечным*; топологическое пространство, в котором из каждого открытого покрытия можно выбрать локально конечное подпокрытие, называется *паракомпактным*. Любая область $U \subset \mathbb{R}^n$ на самом деле паракомпактна, но это – трудная теорема; мы ее не доказываем и пользоваться ей не будем, а при необходимости будем ограничиваться компактными многообразиями.

Изучим теперь отображения многообразий. А именно, пусть теперь даны два многообразия M_1, M_2, и гладкое отображение $\rho : M_1 \to M_2$. Как ведут себя по отношению к этому отображению касательное и кокасательное расслоение?

Касательное расслоение ведет себя самым простым образом. Для любой точки $m \in M_1$ производная отображения ρ – когда речь идет о многообразиях, производную чаще называют "дифференциал" – это каноническое отображение $D\rho_m : T_m M_1 \to T_{\rho(m)} M_2$ (чтобы построить его, можно выбрать локальные карты и проверить, что от выбора ничего не зависит). Все отображения $D\rho_m$ можно склеить в одно отображение $D\rho : TM_1 \to TM_2$; опять же, проверка в локальных картах показывает, что это отображение гладкое – точнее, класса гладкости C^{k-1}, если M_1, M_2 и ρ были класса C^k.

С кокасательным расслоений такого проделать не удается. Причина этого в том, что на кокасательных пространствах $T^*_m M_1$, $T^*_{\rho(m)} M_2$ у нас есть только отображение $D\rho^*_m$, сопряженное к $D\rho_m$, а оно действует не в ту сторону: не из $T^*_m M_1$ в $T^*_{\rho(m)} M_2$, а из $T^*_{\rho(m)} M_2$ в $T^*_m M_1$. Поэтому точку тотального пространства $T^* M_1$ некуда отобразить! Когда мы получали T^*M склейкой по локальным картам, мы уже видели это явление – но в той ситуации отображение ρ было диффеоморфизмом; поэтому $D\rho^*_m$ было обратимым линейным отображением, и можно было взять обратное к нему. В общем случае так сделать нельзя, а можно сделать только следующее: (1) рассмотреть обратный образ $\rho^* T^* M_2$, он по определению снабжен отображением $\rho^* T^* M_2 \to T^* M_2$, и (2) склеить все $D\rho^*_m$ в одно отображение $D\rho^* : \rho^* T^* M_2 \to T^* M_2$. При этом, однако, на *сечениях* кокасательных расслоений – которые, кстати, называются дифференциальными формами – получается хорошо определенное отображение: для любой дифференциальной формы $\alpha \in C^\infty(M_1, T^* M_1)$, определяем

$$\rho^*\alpha(m) = D\rho^*_m(\alpha(\rho(m))). \tag{1.2}$$

Все вместе дает дифференциальную форму $\rho^*\alpha \in C^\infty(M_1, T^* M_1)$. Эта форма называется *прообразом* формы α при отображении $\rho : M_1 \to M_2$.

Упражнение 1.4. *Пусть дано гладкое отображение $\rho : M_1 \to M_2$ гладких мнгообразий, и функция $f \in C^\infty(M_2, T^* M_2)$. Докажите, что $\rho^* Df = D\rho^* f$.*

Надо сказать, что отображение $D\rho^*_m$ становится совсем очевидным, если интерпретировать формы через 1-струи: у нас есть отображение $\rho^* : C^\infty(M_2, T^* M_2) \to C^\infty(M_1, T^* M_1)$, и чтобы получить отображение $\rho^* : J^1_{\rho(m)} M_2 \to J^1_m M_1$, надо только проверить, что прообразы функций, обращающихся в ноль до 1-го порядка в точке $\rho(m) \in M_2$, обращаются в ноль до 1-порядка в точке $m \in M_1$. Понятно также, что то же самое верно и для k-го порядка, $k \geq 1$; поэтому получаем канонические отображения $J^k_{\rho(m)} M_2 \to J^k_m M_1$ и $\rho^* : C^\infty(M_2, J^k M_2) \to C^\infty(M_1, J^k M_1)$. Неформально говорят, что формы и k-струи – и функции – *контравариантны* по отношению к морфизмам многообразий (а касательное расслоение *ковариантно*).

Наконец, что происходит с векторными полями – т.е. с сечениями $C^\infty(M, TM)$ касательного расслоения TM? То же, что и с тотальным пространством кокасательного расслоения: никакого естественного отображения построить нельзя.

Есть одна ситуация, впрочем, в которой что-то сказать можно.

Определение 1.5. Замкнутое подмножество $M' \subset M$ гладкого многообразия M называется *подмногообразием* коразмерности k если у каждой точки $m \in M'$ есть такая окрестности $U_m \subset M$ и локальные координаты в ней, что $U_m \cap M' \subset U_m$ в этих локальных координатах есть координатная гиперплоскость коразмерности k (т.е. задается уравнениями $x_1 = \dots = x_k = 0$).

Любое подмногообразие коразмерности k – само по себе многообразие, размерность его равна $\operatorname{dim} M' = \operatorname{dim} M - k$; карты на M' получаются из карт на M пересечением с M'.

Лемма 1.6. *Пусть $M' \subset M$ – подмногообразие коразмерности k. Тогда $TM' \subset TM$ – подмногообразие коразмерности $2k$.*

Доказательство. Легко видеть, что если $M' \subset M$ локально задается уравнениями $x_1 = \dots = x_k = 0$, то $TM' \subset TM$ задается уравениями $x_1 = \dots = x_k = Dx_1 = \dots = Dx_k = 0$ – где мы понимаем производные Dx_i как функции на TM, линейные вдоль слоев. □

В такой ситуации, легко понять, когда из векторное поля ξ на M можно получить векторное поле ξ' на M' – это происходит тогда, когда для каждой точки $m \in M'$ вектор $\xi(m) \subset T_xM$ лежит в подпространстве $T_xM' \subset T_xM$. Говорят, что векторное поле ξ *касательно* к подмногообразию $M' \subset M$. Таким образом можно геометрически представлять себе векторные поля, например, на подмногообразиях $\mathbb{R}^n$ – таких как сфера. Векторное поле на таком $M \subset \mathbb{R}^n$ – это гладкая векторнозначная функция $\xi : M \to \mathbb{R}^n$, причем в каждой точке $m \in M$ вектор $\xi(m)$ касается подмногообразия M.

Вернемся в общую ситуацию. Заметим, что, наряду с дифференциальными формами и струями функций, контравариатно ведут себя также сечения произвольных тензорных степеней кокасательного расслоения: если дано $\chi \in C^\infty(M_2, T^{\otimes k*}M_2)$ – такие объекты называются *контравариантными тензорами валентности* k – и отображение $\rho : M_1 \to M_2$, правило (1.2) позволяет построить $\rho^*\chi \in C^\infty(M_1, T^{\otimes k*}M_1)$. То же верно, если ограничиться тензорами с разными условиями симметрии. На практике, особенно важны во-первых, симметрические тензоры валентности 2, и во-вторых, антисимметрические – еще говорят "кососимметрические" – тензоры любой валентности $k \leq \mathsf{dim}\, M$.

Определение 1.7. Пусть M – гладкое многообразие. *Римановой метрикой* на M называется такой симметрический тензор $g \in C^\infty(M, S^2T^*M)$, что для каждой точки $x \in M$, g_x – положительно определенная симметрическая билинейная форма на T_xM.

Иными словами, риманова метрика – это семейство евклидовых метрик на касательных пространствах T_xM, гладко зависящих от точки $x \in M$.

Определение 1.8. *Дифференциальной формой степени* k на многообразии M – или просто *k-формой* на M – называется сечение $\alpha \in \Lambda^kT^*M$ k-й внешней степени кокасательного расслоения T^*M.

Иными словами, k-форма это семейство k-линейных кососимметрических форм на касательных пространствах T_xM, гладко зависящий от точки $x \in M$. Форма степени 1 это то, что выше мы называли просто дифференциальной формой, без степени – сечение кокасательного расслоения.

Упражнение 1.9. *Чему равно $C^\infty(M, \Lambda^kT^*M)$, если $k > \mathsf{dim}\, M$?*

Римановы метрики важны вот по какой причине. Когда мы строили анализ на областях в векторном пространстве, мы говорили, что надо выбрать евклидову метрику, но что от выбора ничего не зависит – ни топология, ни понятие гладкости. На уровне определений, то же самое верно и для произвольных многообразий. Но при более тонком исследовании часто полезно-таки зафиксировать метрику (даже если потом от нее ничего не будет зависеть). К счастью, это всегда можно сделать.

Лемма 1.10. *Пусть M – компактное многообразие. Тогда на M существует риманова метрика g.*

Доказательство. Метрика всегда существует в окрестности каждой точки x – достаточно взять постоянную метрику в локальной карте. Выберем набор окрестностей U_x, метрику g_x

и срезающих функций $\psi_x \in C^\infty(M, \mathbb{R})$, которые равны нулю вне U_x, всюду неотрицательны, иравны 1 в меньших окрестностях $U'_x \subset M$. Выберем конечное подпокрытие U'_i из покрытия U'_x, и рассмотрим

$$g = \psi_1 g_1 + \cdots + \psi_k g_k \in C^\infty(M, S^2 T^* M).$$

Тогда g – гладкий симметрический тензор валентности 2, и для каждой точки $m \in M$ и касательного вектора $v \in T_m M$ имеем $g(v, v) \geq \psi_i(x) g_i(v, v) > 0$, где $m \in U'_i$. Поэтому g' положительно определена, а потому и невырождена. □

Замечание 1.11. Условие компактности на самом деле можно ослабить, см. замечание 1.3.

Среди прочего, риманова метрика на многообразии позволяет ввести на нем понятие расстояния, т.е. метрику в смысле метрических пространств (в частности, любое компактное мнгообразие метризуемо). К сожалению, пока мы не можем этого сделать, т.к. для этого нужна теория интегрирования.

Дифференциальные формы тоже важны прежде всего из-за их связи с теорией интегрирования: дифференциальная форма степени k это то, что можно проинтегрировать по компактному подмногообразию размерности k и получить число. Про это мы на этой лекции говорить не будем, однако; прежде чем заняться интегрированием, объясним, какие с формами можно делать алгебраические операции: как их перемножать, и как их дифференцировать.

Перемножают формы так же, как и элементы внешенй алгебры векторного пространства (см. листок Алгебра 5). Это произведение называется внешним и обозначается значком $\wedge$. Единственное, что надо помнить – это что внешенее произведение коммутативно *с учетом знаков*: если даны формы α, β степеней k и l, то

$$\alpha \wedge \beta = (-1)^k l \beta \wedge \alpha.$$

Дифференцировать же формы можно благодаря следующему фундаментальному факту.

Теорема 1.12 (Комплекс де Рама.). *Пусть дано гладкое многообразие M. Тогда существует единственная операция $d : C^\infty(M, \Lambda^\bullet T^* M) \to C^\infty(M, \Lambda^{\bullet+1} T^* M)$, для которой*

$$\begin{aligned}
d(\alpha \wedge \beta) &= d\alpha \wedge \beta + (-1)^{\mathsf{deg}\,\alpha} \alpha \wedge d\beta, \\
d^2 &= 0 \\
d(f) &= Df \qquad \text{для любой функции } f \in C^\infty(M, \mathbb{R}).
\end{aligned}$$

Если же дано гладкое отображение $\rho : M_1 \to M_2$, то для любой k-формы α на M_2 имеем $\rho^* d\alpha = d\rho^* \alpha$.

Заметим, что первое условие – это обобщение правила Лейбница. Операция d называется *дифференциал де Рама.*

Доказательство. Заметим сначала, что в силу единственности утверждение достаточно доказывать локально. Действительно, пусть мы уже доказали теорему для всех открытых подмножеств $U \subset \mathbb{R}^n$. Тогда у любой точки $x \in M$ есть окрестность $U \subset M$, в которой дифференциал де Рама мы построили, и для любой k-формы α на M мы можем и должны положить

$$(d\alpha)|_U = d\left(\alpha|_U\right).$$

В силу единственности, эти формы согласованы на пересечениях $U \cap U'$ и задают одну общую форму $d\alpha$ на всем M.

Итак, заменим M на открытую область $U \subset M$, и выберем систему координат x_i в U. Тогда любая k-форма $\alpha \in C^\infty(M, \Lambda^k T^* M)$ однозначно запишется в виде

$$\alpha = \sum_I f_I(m) dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k},$$

где суммирование ведется по упорядоченным наборам индексов $I = \langle i_1, \dots, i_k \rangle$, $i_1 < \cdots < i_k$. Тогда поскольку $d^2 = 0$, мы по правилу Лейбница должны положить

$$\alpha = \sum_I df_I(m) \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k},$$

причем $df_I(m) = Df_I(m)$ тоже известно. Легко проверить, что так определенная операция d удовлетворяет правилу Лейбница. Осталось доказать, что $d^2 = 0$. Но заметим, что

$$d^2(\alpha \wedge \beta) = d(d\alpha \wedge \beta + (-1)^{\mathsf{deg}(\alpha)} \alpha \wedge d\beta) = d^2(\alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge d^2 \beta,$$

а остальные два члена в правой части сокращаются – т.е. d^2 тоже удовлетворяют правилу Лейбница. Поэтому равенство $d^2 = 0$ достаточно доказать для функций и для форм вида dx_i – все остальные получаются из них произведениями. Для форм вида dx_i по определению $d(dx_i) = 0$, а для функции f равенство $d^2 f = 0$ эквивалентно тому, что частные производные f коммутируют – $D_v D_{v'} f = D_{v'} D_v f$. $\square$