1 Лекция 5.

На прошлой лекции мы определили многообразия размерности n и гладкие функции на них, а также построили некоторые примеры многообразий (например, гиперповерхности в $\mathbb{R}^n$ – сфера и т.д.) Пусть теперь дано многообразие M и гладкая $\mathbb{R}$-значная функция f на нем. Как придать смысл производной Df?

Согласно гротендиковскому подходу, для этого надо переписать формализм производных для функций на области в $\mathbb{R}^n$, используя только алгебраическую структуру кольца гладких функций. Как мы уже говорили, это, как ни странно, можно сделать; но мы займемся этим в следующей лекции. Пока что будем следовать подходу традиционному и думать про многообразие как про топологическое пространство, покрытое согласованными картами. Тогда локально, производную можно просто определить в карте; а чтобы придать глобальный смысл Df, надо разобраться с тем, что происходит при переходе от одной карты к другой. Иными словами, надо изучить, как меняется Df при диффеоморфизмах.

Итак, пусть даны области $U_1, U_2 \subset \mathbb{R}^n$ и диффеоморфизм $\Phi : U_1 \to U_2$ класса C^k. Возьмем функцию $f \in C^k(U_2, \mathbb{R})$ с производной $Df \in C^k(U_2, \mathbb{R}^{n*})$. Производная $D(f \circ \Phi)$ композиции $f \circ \Phi \in C^k(U_1, \mathbb{R})$ (эта композиция еще обозначается $\Phi^* f$) вычисляется по правилу дифференцирования сложной функции:

$$D(\Phi^* f)(x) = D\Phi_x(\Phi^* Df(x)). \tag{1.1}$$

Мы видим, что про производную *нельзя думать как про функцию* $U \to \mathbb{R}^{n*}$ – будь она просто функцией, в правой части должно было бы стоять $\Phi^* Df(x)$, без дополнительного линейного отображения $D\Phi_x$. Иными словами, если дана функция $f \in C^k(M, \mathbb{R})$, то из производных, вычисленных в локальных картах, нельзя склеить глобальную функцию $Df \in C^{k-1}(M, \mathbb{R}^{n*})$.

Для борьбы с этим явлением, делают вот что. Для каждого открытого подмножества $U \subset V$, обозначим через $T(U)$ произведение $U \times V$ – иными словами, множество пар $\langle u, v\rangle$ точки $u \in U$ и вектора $v \in V$. Тогда $T(U)$ – область в векторном пространстве $V \oplus V$, называемая *касательным расслоением* к U. Если даны две области $U_1, U_2 \subset V$ и диффеоморфизм $\Phi : U_1 \to U_2$ класса C^k, то определим отображение $D\Phi : T(U_1) \to T(U_2)$ как

$$D\Phi(\langle u, v\rangle) = \langle \Phi(u), D\Phi_u(v)\rangle. \tag{1.2}$$

Легко видеть (упражнение!), что $D\Phi$ – тоже диффеоморфизм, класса C^{k-1}. По определению, $D\Phi$ совместимо с проекциями $\pi_i : T(U_i) \to U_i$ – имеем $\pi_2 \circ D\Phi = \Phi \circ \pi_1$. (Заметим, что с проекциями на второй сомножитель V отображение $D\Phi$ *не совместимо* – отображение $D\Phi_u$ зависит от точки u!) Кроме того, правило дифференцирования сложной функции немедленно показывает, что сопоставление $U \mapsto T(U), \Phi \mapsto D\Phi$ *функториально* – если есть области $U_1, U_2, U_3 \subset V$ и диффеоморфизмы $\Phi_{12} : U_1 \to U_2$, $\Phi_{23} : U_2 \to U_3$, то $D(\Phi_{23} \circ \Phi_{12}) = D\Phi_{23} \circ D\Phi_{12}$. Поэтому для любого многообразия M размерности n и класса C^k, заданного полным атласом $\langle U_\alpha, h_\alpha\rangle$, можно склеить все $T(h_\alpha(U_\alpha))$ в одно множество $T(M)$, положив

$$T(M) = \bigcup T(h_\alpha(U_\alpha))/\sim,$$

где отношение эквивалентности $\sim$ задано так: $y_1 \in T(h_1(U_1))$ эквивалентно $y_2 \in T(h_2(U_2))$, если $\pi_i(y_i) \in h_i(U_1 \cap U_2$ и $D(h_2 \circ h_1^{-1})(y_1) = y_2$. Поскольку $D\Phi$ функториально, это действительно отношение эквивалентности. Кроме того, проекции $h_\alpha^{-1} \circ \pi_\alpha : T(h_\alpha(U_\alpha)) \to h_\alpha(U_\alpha) \to U_\alpha$ склеиваются в общее отображение $\pi : T(M) \to M$, и для любой карты $U \subset M$ прообраз $\pi^{-1}(U)$ канонически отождествляется с $T(h_U(U))$. Эти отождествления можно взять в качестве карт на $T(M)$; они согласованы и задают на $T(M)$ структуру многооообразия размерности $2n$ и класса гладкости $k-1$.

Определение 1.1. Многообразие $T(M)$ называется *касательным расслоением* многообразия M.

Заметим, что по построению, на любом слое $\pi^{-1}(m) \subset TM$ проекции $TM \to M$ есть совершенно каноническая структура векторного пространства. Это векторное пространство обозначается $T_m M$ и называется касательным пространством к M в точке $m \in M$.

Теперь производной Df можно придать смысл следующим образом. Локально, на области $U \subset V$, Df это функция $U \to V^*$ – т.е. каждой точке $u \in U$ сопоставляется линейное отображение $V \to \mathbb{R}$. Можно изменить точку зрения и рассматривать Df как функцию со значениями в $\mathbb{R}$, но определенную на $T(U)$: $Df(\langle u, v\rangle) = Df_u(v) \in \mathbb{R}$. Легко видеть, что это гладкая функция (класса гладкости $k-1$ если f класса гладкости k). И в этой интерпретации, формула (1.1) переписывается как $D(\Phi^* f) = D\Phi^*(f)$. Поэтому если дана $f \in C^k(M, \mathbb{R})$, то локально вычисленные производные Df можно однозначно склеить до функции $Df \in C^{k-1}(TM, \mathbb{R})$. При этом полученная функция будет линейна по слоям.

Другой способ придать смысл производной такой. Вместо того, чтобы для каждой области $U \subset V$ рассматривать область $T(U) = U \times V \subset V \oplus V$, можно рассмотреть область $T^*(U) = U \times V^* \subset V \oplus V^*$. Диффеоморфизм $\Phi : U_1 \to U_2$ действует и на $T^*(U)$ – для этого надо заметить, что, поскольку Φ диффеоморфизм, производная $D\Phi_u : V \to V$ обратима для каждого $u \in U$, и в формуле (1.2) вместо $D\Phi_u : V \to V$ поставить обратный к сопряженному оператор $(D\Phi_u^*)^{-1} : V^* \to V^*$. Это действие тоже функториально – иными словами, совместимо с композицией – и потому для любого многообразия M класса C^k можно склеить $T^*(h_\alpha(U_\alpha))$ для разных карт U_α в одно многообразие T^*M класса C^{k-1}.

Определение 1.2. Многообразие T^*M называется *кокасательным расслоением* многообразия M.

Как и для TM, слой проекции $T^*M \to M$ над любой точкой $m \in M$ имеет структуру векторного пространства, которое, как легко видеть, двойственно касательному пространству $T_m M$.

Далее, локально вместо производной $Df : U \to V^*$ можно рассмотреть ее график, т.е. соответствующее сечение $(\mathsf{id} \times Df) : U \to U \times V^* = T^*(U)$ естественной проекции $T^*(U) \to U$. И в силу (1.1), все эти сечение склеятся вместе в одно сечение $Df : M \to T^*M$ естественной проекции $T^*M \to M$.

Итак, производная это или функция на касательном расслоении, линейная по слоям, или сечение кокасательного расслоения.