Теория Меры 6: Мера Бореля

6.1. Мера и объем

На протяжении этого листа, M есть хаусдорфово топологическое пространство, а $\mathbf{C}$ - множество компактных подмножеств M.

Определение 6.1. алгеброй борелевских множеств на M называется σ-алгебра $\mathbf{S}$, порожденная $\mathbf{C}$. **Мера Бореля** - это мера на $(M, \mathbf{S})$.

Задача 6.1. Предположим, что M локально компактное и имеет счетную базу открытых множеств. Докажите, что $\mathbf{S}$ - σ-алгебра, порожденная открытыми множествами.

Задача 6.2. Предположим, что любое замкнутое подмножество в M может быть получено как счетное объединение компактов (в такой ситуации, говорится, что M **σ-компактно**). Докажите, что $\mathbf{S}$ - σ-алгебра, порожденная открытыми множествами.

Задача 6.3.

а. Приведите пример связного хаусдорфова топологического пространства, которое локально компактно, но не σ-компактно.

б. Вытекает ли из σ-компактности локальная компактность?

Определение 6.2. Пусть задана функция $\lambda: \mathbf{C} \longrightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$, где $\mathbf{C}$ есть множество компактных подмножеств M. Мы говорим, что λ

а. **Монотонна**, если $\lambda(A) \leq \lambda(B)$ для $A \subset B$

б. **аддитивна**, если $\lambda(A \coprod B) = \lambda(A) + \lambda(B)$

в. **полуаддитивна**, если $\lambda(A \cup B) \leq \lambda(A) + \lambda(B)$

В таком случае, λ называется **объемом**.

Определение 6.3. Пусть на M задан объем $\lambda: \mathbf{C} \longrightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$. **Внутренним объемом** подмножества $S \subset M$ называется число $\lambda_*(S) := \sup\limits_C \lambda(C)$, где супремум берется по всем компактным $C \subset S$. **Внешней мерой** подмножества $S \subset M$ называется число $\lambda^*(S) := \sup\limits_U \lambda(U)$, где инфимум берется по всем открытым множествам U, содержащим S.

Задача 6.4. Докажите, что для любого открытого множества $U \subset M$, $\lambda_*(U) = \lambda^*(U)$.

Определение 6.4. Напомним, что **внутренностью** подмножества $A \subset M$ называется множество всех $x \in A$ таких, что некоторая окрестность x содержится в A.

Задача 6.5. Докажите, что внутренность любого множества открыта. Докажите, что внутренность $A \subset M$ совпадает с $M \backslash \overline{(M \backslash A)}$, где $\overline{(M \backslash A)}$ обозначает замыкание $M \backslash A$ в M.

Задача 6.6. Докажите, что для любого компактного подмножества $C \subset M$,

$$\lambda^*(C) \geq \lambda(C) \geq \lambda_*(C_0),$$

где C_0 обозначает внутренность C.

Задача 6.7 (*). Пусть M локально компактно и имеет счетную базу. Докажите, что $C = \bigcap U_i$, для некоторой последовательности открытых множеств, содержащих C.

Задача 6.8 (*). В этих условиях, предположим, что $\lambda(\bigcap C_i) = \lim \lambda(C_i)$ для любой последовательности компактных множеств $C_0 \supset C_1 \supset \ldots$ такой, что $\bigcap C_i$ компактно. Докажите, что для любого компактного подмножества $C \subset M$, $\lambda^*(C) = \lambda(C)$,

Задача 6.9 (!). Пусть $M \subset \mathbb{R}^n$. Докажите, что мера Лебега на M задает объем

$$\lambda : \ \mathbf{C} \longrightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}.$$

Докажите, что в такой ситуации $\lambda^*(C) = \lambda(C)$ для любого компактного подмножества $C \subset M$.

Задача 6.10. Пусть M - хаусдорфово топологическое пространство, на котором задан объем $\lambda : \ \mathbf{C} \longrightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$. Предположим, что $C \subset U \cup V$ компактное подмножество объединения открытых множеств U и V. Докажите, что найдутся компактные подмножества $C_U \subset U$, $C_V \subset V$ такие, что $C_U \cup C_V = C$.

Указание. Докажите, что два непересекающихся компактных подмножества хаусдорфова пространства имеют непересекающиеся окрестности. Воспользуйтесь этим, чтобы найти непересекающиеся открытые окрестности U_1 у $C \backslash V$ и V_1 у $C \backslash U$. Докажите, что $C_V := \backslash U_1$, $C_U := \backslash V_1 \subset U$ удовлетворяют условиям задачи.

Задача 6.11 (!). Пусть M - хаусдорфово топологическое пространство, на котором задан объем $\lambda : \ \mathbf{C} \longrightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$. Пусть U, V открытые множества. Докажите, что $\lambda_*(U \cup V) \leq \lambda_*(U) + \lambda_*(V)$.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Задача 6.12. Выведите из этого, что λ^* полуаддитивна, то есть $\lambda^*(\bigcup A_i) \leq \sum \lambda^*(A_i)$ для любого конечного набора $A_i \subset M$.

Задача 6.13 (!). Докажите, что λ^* счетно полуаддитивно, то есть удовлетворяет $\lambda^*(\bigcup A_i) \leq \sum \lambda^*(A_i)$ для любого счетного набора $A_i \subset M$.

Указание. Сведите утверждение к $\lambda_*(\bigcup U_i) \leq \sum \lambda^*(U_i)$, где U_i все открыты. Если $C \subset \bigcup U_i$ компакт, то C покрывается конечным набором U_i. Следовательно,

$$\lambda_*(\bigcup U_i) \leq \lambda_*(U_1 \cup U_2 \cup \ldots U_n)$$

для конечного поднабора. Воспользуйтесь предыдущей задачей, чтобы получить $\lambda_*(U_1 \cup U_2 \cup \ldots U_n) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_*(U_i)$.

Задача 6.14 (!). Пусть U открыто, C компактно. Докажите, что

$$\lambda^*(U) = \lambda^*(U \backslash C) + \lambda^*(U \cap C).$$

Указание. В силу уже доказанного, достаточно установить

$$\lambda^*(U) \geq \lambda^*(U \backslash C) + \lambda^*(U \cap C).$$

$\lambda^*(U \backslash C) = \lambda_*(U \backslash C)$ есть $\sup \lambda(D)$, где супремум берется по всем компактным D, лежащим в $U \backslash C$. Для каждого такого D, $U \backslash D$ это окрестность $C \cup U$, и $\lambda^*(C \cup U) \leq \lambda_*(U \backslash D) = \sup \lambda(E)$, где супремум берется по всем компактам E, лежащим в $U \backslash D$. По построению D и E не пересекаются. Докажите, что

$$\lambda(D) + \lambda^*(U \cap C) \geq \lambda(E) + \lambda(D) = \lambda(D \cup E) \leq \lambda_*(U) = \lambda^*(U)$$

Определение 6.5. Пусть M - хаусдорфово топологическое пространство, на котором задан объем $\lambda: \mathbf{C} \longrightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$. Подмножество $A \subset M$ называется **λ^*-измеримым**, если

$$\lambda^*(B) = \lambda^*(B \backslash A) + \lambda^*(B \cap A)$$

для любого $B \subset M$.

Задача 6.15 (!). Пусть

$$\lambda^*(U) = \lambda^*(U \backslash A) + \lambda^*(U \cap A) \tag{1}$$

для любого $U \subset M$. Докажите, что A λ^*-измеримо.

Указание. $\lambda^*(B) = \inf \lambda^*(V)$, где инфимум берется по всем открытым окрестностям V. Поэтому из (1) следует

$$\lambda^*(B) = \inf_V \lambda^*(V) = \inf_V \left(\lambda^*(V \backslash A) + \lambda^*(V \cap A)\right) \leq \lambda^*(V \backslash A) + \lambda^*(V \cap A) \leq \lambda^*(B \backslash A) + \lambda^*(B \cap A)$$

Обратное неравенство вытекает из полуаддитивности.

Задача 6.16 (!). Докажите, что λ^*-измеримые множества образуют алгебру.

Задача 6.17 (!). Докажите, что счетное объединение λ^*-измеримых множеств λ^*-измеримо. Выведите из этого, что любое борелевское множество λ^*-измеримо. Докажите, что λ^* задает меру на алгебре борелевских множеств.

Определение 6.6. Эта мера называется **борелевской мерой, связанной с объемом** $\lambda: \mathbf{C} \longrightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$.

Задача 6.18. Пусть $M = \mathbb{R}^n$, а $\lambda: \mathbf{C} \longrightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$ это мера Лебега. Докажите, что внешняя мера λ^* на борелевских множествах равна мере Лебега.

6.2. Мера Хаусдорфа

Определение 6.7. Пусть M - компактное метрическое пространство. Для подмножества $S \subset M$, определим $\operatorname{diam} S$ как $\sup_{x,y \in S} d(x,y)$. Для счетного покрытия $\{S_i\}$ и вещественного числа d, определим **d-вес** покрытия как

$$w_d(\{S_i\}) := \sum_i (\operatorname{diam} S_i)^d.$$

Для заданного $\epsilon > 0$, обозначим за

$$\mu_{d,\epsilon}(M) := \inf_\epsilon w_d(S_i)$$

где инфимум берется по всем покрытиям M множествами диаметра $\leq \epsilon$. **Размерность Хаусдорфа** $\dim_h(M)$ это инфимум в множестве всех d, для которых $\mu_{d,\epsilon}(M) = 0$.

Задача 6.19. Докажите, что $\dim_h([0,1]) = 1$.

Задача 6.20 (*). Пусть M_1, M_2 - компактные метрические пространства. Докажите, что

$$\dim_h(M_1 \times M_2) = \dim_h(M_1) + \dim_h(M_2).$$

Задача 6.21 (*). Найдите размерность Хаусдорфа единичного куба в $\mathbb{R}^n$.

Задача 6.22 (*). Определим канторово множество как подмножество $K \subset [0, 1]$, состоящее из всех точек, в троичном разложении которых нет 1. Найдите $\dim_h(K)$.

Задача 6.23 (**). Постройте метрическое пространство бесконечной размерности Хаусдорфа.

Определение 6.8. Пусть M - компактное метрическое пространство, $\dim_h M = d$, а $K \subset M$ компактное подмножество. Определим меру Хаусдорфа $\mathrm{Vol}_h(K)$ как

$$\lim_{\epsilon \longrightarrow 0} \mu_{d,\epsilon}(K)$$

Задача 6.24. Докажите, что этот предел всегда существует.

Задача 6.25. окажите, что $\mathrm{Vol}_h(K)$ является объемом, в смысле определения, данного в начале листка.

Задача 6.26 (*). Пусть M это единичный куб. Докажите, что $\mathrm{Vol}_h(K)$ всегда определен, и пропорционален мере Лебега.

Задача 6.27 (**). Пусть M - канторовское множество, а K - подмножество, состоящее из всех чисел, в троичной записи которых нет последовательности 00. Найдите $\frac{\mathrm{Vol}_h(K)}{\mathrm{Vol}_h(M)}$.